

Lesson 15

Esercizio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 1})$$

È una F.I. (= formula indeterminata)
del tipo $\infty - \infty$.

Ho:

Moltiplico e divido per

$$\lim_n (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 1}) = \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + 1}} =$$

$$= \lim_n \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + 1}} =$$

$$= \lim_n \frac{2n - 1}{\sqrt{n^2(1 + 2/n)} + \sqrt{n^2(1 + 1/n^2)}} =$$

$$= \lim_n \frac{n(2 - 1/n)}{n\sqrt{1 + 2/n} + n\sqrt{1 + 1/n^2}} =$$

$$= \lim_n \frac{n(z - 1/n)}{n(\sqrt{1+2/n} + \sqrt{1+1/n^2})} =$$

$$= \lim_n \frac{z - \cancel{1/n}}{\sqrt{1+\cancel{2/n}} + \sqrt{1+\cancel{1/n^2}}} = \frac{z}{2} = 1.$$

ATTENZIONE

$$\sqrt{n^2 + 2n} \approx n$$

$$\sqrt{n^2 + 1} \approx n$$

ma $\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 1}$ non è asintoticamente
equivalente a

$$n - n = 0.$$

Inoltre,

$$\lim_n \frac{0}{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 1}} = 0$$

quindi la successione è costantemente zero.

Esercizio

$$\begin{aligned}
 \lim_n \frac{\sqrt{n^2+5} + \sqrt{n^2+4}}{n+3} &= \lim_n \frac{\sqrt{n^2} \sqrt{1+\frac{5}{n^2}} + \sqrt{n^2} \sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{n(1+\frac{3}{n})} \\
 &= \lim_n \cancel{n} \left(\sqrt{1+\frac{5}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{n^2}} \right) \\
 &= \lim_n \frac{\cancel{n} \left(\sqrt{1+\frac{5}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{n^2}} \right)}{1+\frac{3}{n}} \\
 &= \frac{1+1}{1} = 2.
 \end{aligned}$$

Esercizio

$$\begin{aligned}
 \lim_n \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^3+3}}{2\sqrt{n^3+1}} &= \lim_n \frac{\sqrt{n^3} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1+\frac{3}{n^3}} \right)}{2\sqrt{n^3} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} \right)} \\
 &= \lim_n \frac{\sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n^3}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}} \\
 &= \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Esercizio

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$\lim_n (\sqrt{3n-5} - \sqrt{n}) =$$

$$= \lim_n (\sqrt{3n-5} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{3n-5} + \sqrt{n}}{\sqrt{3n-5} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_n \frac{(\sqrt{3n-5})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{3n-5} + \sqrt{n}} = \lim_n \frac{3n-5-n}{\sqrt{3n-5} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_n \frac{2n-5}{\sqrt{3n-5} + \sqrt{n}} = \lim_n \frac{\sqrt{n} \left(2 - \frac{5}{n}\right)}{\sqrt{n} (\sqrt{3 - \frac{5}{n}} + 1)}$$

$$= \lim_n \frac{\sqrt{n} \left(2 - \frac{5}{n}\right)}{\sqrt{3 - \frac{5}{n}} + 1} = +\infty.$$

Diagrammatic annotations:
- A blue circle around $\sqrt{n}$ in the numerator has an arrow pointing to $+\infty$.
- A blue circle around $\left(2 - \frac{5}{n}\right)$ in the numerator has an arrow pointing to 2 .
- A blue circle around $\sqrt{3 - \frac{5}{n}} + 1$ in the denominator has an arrow pointing to $1 + \sqrt{3}$.
- A large blue bracket groups the denominator and the limit result, indicating the overall behavior.

tende ad un numero finito

$$\left(\text{che è } \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \right)$$

Esercizio X

$$\lim_n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{2+n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+3}} = X \cdot \frac{A}{A} \cdot \frac{B}{B} = X \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A}$$

$$= \lim_n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{2+n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n+3}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{2+n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{2+n}} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}$$

$$= \lim_n \frac{n+1 - (2+n)}{n - (n+3)} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{2+n}}$$

$$= \lim_n \frac{n+1 - 2 - n}{n - n - 3} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{2+n}}$$

$$= \lim_n \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{2+n}} = \lim_n \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{n} (1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n}})}{\sqrt{n} (\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}})}$$

$$= \lim_n \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = \frac{1}{3}$$

Domanda:

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = ?$$

Devo studiare la successione per n non
so dire semplicemente sostituendo quanto
vale il limite.

Convergenza

$$n \mapsto a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Valori:

n	a_n
1	2
2	$(3/2)^2 \approx 2.25$
3	$(4/3)^3 \approx 2.37$
4	$(5/4)^4 \approx 2.44$
5	$(6/5)^5 \approx 2.49$

Si dimostra che la
successione è CRESCENTE

$$n \mapsto b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Valori:

n	b_n
1	4
2	$(3/2)^3 \approx 3.38$
3	$(4/3)^4 \approx 3.16$
4	$(5/4)^5 \approx 3.05$
5	$(6/5)^6 \approx 2.99$

Si dimostra che la
successione è DECRESCENTE

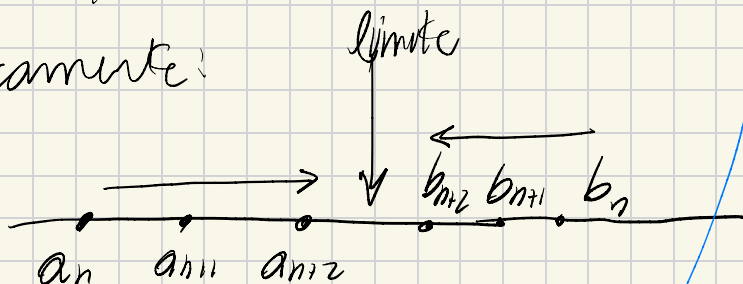
Otteniamo $\text{perch\`e } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} = b_n$

$$\boxed{2 \leq a_n < b_n \leq 4 \quad (*)}$$

Crescente decrescente

Conclusione: si dimostra grazie a (*) che
 $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ esiste finito

Euristicamente:



(*) mi dice che la successione
 $n \mapsto a_n$

è CRESCENTE e LIMITATA.

Teorema: ogni successione crescente e limitata ha limite.

Oss: noto che posso applicare questo teorema grazie a (*), che mi permette di concludere che a_n è limitata (da 4).

Esempio

$$\lim_n \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n=2r} \left(1 + \frac{2}{2r}\right)^{2r}$$

pongo $n=2r$

$$= \lim_{2r \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r \right)^2$$

$$= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r \right)^2 = e^2.$$

Esempio Più in generale, consideriamo, per $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

— 0 —

Potenza di binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

In generale, $(a+b)^n = ?$ Per scriverlo, abbiamo bisogno di introdurre i coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dove se $m \in \mathbb{N}$,

$$m! = m(m-1)(m-2) \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Esempio:

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Binomio di Newton:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots \\ &\quad + \dots b^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \end{aligned}$$

intendendo che $\binom{n}{0} = 1$, cioè $0! = 1$.

Esempio: $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n.$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

In general,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(k-1))}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

Collegiamo (utilizzando il binomio di Newton)

$$\underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{a \parallel b} = 1 + \underbrace{\binom{n}{1}}_n \frac{x}{n} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^2}{n^2} + \underbrace{\binom{n}{3}}_{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}} \frac{x^3}{n^3} + \dots + \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{n \cdot x}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{x^2}{n \cdot n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3! \cdot n \cdot n \cdot n} x^3 + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{x^3}{3!} + \dots + \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

Segue:

$$\lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots$$

La somma converge
all'infinito perché prende
il $\lim_n$

Conclusione 1 per il calcolo di $(1 + \frac{x}{n})^n$

e $\lim_n (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ abbiamo bisogno di considerare certe somme infinite.

Conclusione 2

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots$$