

Lezione 8

giovedì 23 ottobre 2025

14:30

FUNZIONI LINEARI

$$f: V \rightarrow W$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(v) = f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

f è lineare se:

$$(1) \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$(2) \quad f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall v \in V \text{ e } \forall \text{ scalare } \lambda$$

Da (1) e (2) segue che

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$

Osservazione: se f è lineare allora $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Perché $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ quindi

$$\begin{aligned} f(\vec{0} + \vec{0}) &= f(\vec{0}) \\ \underbrace{f(\vec{0}) + f(\vec{0})} \end{aligned}$$

Se $f(\vec{0}) = w$, allora $w + w = w$

quindi $w = w - w = \vec{0}$, quindi $w = \vec{0}$,

quindi $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Esempio: (1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y + 4 \\ x + y - 2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow f \text{ NON \textcolor{yellow}{\text{e' lineare}}}$$

$$(2) \quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2xy \\ 3x - y^2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vediamo se } f(v_1 + v_2) \stackrel{?}{=} f(v_1) + f(v_2)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + 2(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \\ 3(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)^2 \end{pmatrix} =$$

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_1b_1 \\ 3a_1 - b_1^2 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + 2a_2b_2 \\ 3a_2 - b_2^2 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_1b_1 + a_2 + 2a_2b_2 \\ 3a_1 - b_1^2 + 3a_2 - b_2^2 \end{pmatrix} =$$

??

NO,
NON

sono
uguali.

Quindi f non \textcolor{yellow}{\text{e' lineare}}.

$$(3) \quad f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(3) \quad f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5x - 2y + 3z \\ y - 2z \end{pmatrix}$$

Si verifica che f è lineare. (esercizio)

Teorema. Sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Per calcolare $f(v)$ per ogni vettore $v \in V$ è sufficiente conoscere $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$, dove $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono una base di V .

Dimostrazione. $v \in V \Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$

OK

Esempio. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Siano $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$

Sappiamo che $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sia $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare $f(v)$.

$$v = \underbrace{2}_{2} e_1 + \underbrace{-1}_{-1} e_2 + \underbrace{2}_{2} e_3 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$$

$$\begin{aligned}
 f(v) &= f(2e_1 - e_2 + 2e_3) = 2 \underbrace{f(e_1)}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}} - \underbrace{f(e_2)}_{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} + 2 \underbrace{f(e_3)}_{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}} = \\
 &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare.

Sia $v_1, v_2, \dots, v_m$ base di V

$f(v_j) \in W$, sia $w_1, w_2, \dots, w_m$ base di W

$$\begin{aligned}
 f(v_1) &= a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m \\
 f(v_2) &= a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Si ottiene una matrice

$$A = \begin{pmatrix} \dots & & \\ & a_{ij} & \\ \dots & & \end{pmatrix}$$

Conclusione: a una funzione lineare $f: V \rightarrow W$

si può associare una matrice A .

Questa matrice dipende dalle basi di V e W , cioè se cambiamo la scelta delle basi, cambia anche la matrice.

Esempio di matrice associata a una funzione lineare.

$$\underbrace{f: \mathbb{R}^2}_{V} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^2}_{W}, \quad f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$f: V \rightarrow W, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ \end{pmatrix}$$

Sia $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ base di V

Sia $w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ base di W .

(a) Scrivere la matrice di f nelle basi $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ di W .

(b) Scrivere la matrice di f nelle basi canoniche di V e W .

(a) $f(v_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 = a_{11} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si trova:
$$\begin{cases} -3a_{11} + 2a_{21} = 1 \\ a_{11} + 0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{21} = 1 + 12 \\ a_{11} = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_{11} = 4, \quad a_{21} = \frac{13}{2}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a_{12} \\ \frac{13}{2} & a_{22} \end{pmatrix}$

$f(v_2) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 = a_{12} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -3a_{12} + 2a_{22} = 5 \\ a_{12} + 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{22} = 5 + (-3) = 2 \\ a_{12} = -1 \end{cases}$$

$a_{12} = -1, \quad a_{22} = 1$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matrice di } f \text{ nelle basi } v_1, v_2 \text{ di } V \text{ e } w_1, w_2 \text{ di } W.$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{13}{2} & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} v_1, v_2 \text{ di } V \\ w_1, w_2 \text{ di } W \end{matrix}$$

$$(b) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{base canonica di } V$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{base canonica di } W$$

$$f(v_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \end{cases}$$

$$f(v_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{la matrice è: } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{matrice di } f \text{ nelle} \\ \text{basi canoniche} \\ \text{di } V \text{ e } W \end{matrix}$$