

Lezione 7

martedì 21 ottobre 2025

14:30

Per scoprire quale è la combinazione lineare dei 3 vettori che dà $\vec{0}$ come risultato:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{matrice} \\ \text{identica}}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{stesse} \\ \text{operazioni} \\ \text{di prima}}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\downarrow$$

$$-3u_1 + 1 \cdot u_2 + 2u_3 = \vec{0}$$

Def. Il rank di una matrice è il numero di righe linearmente indipendenti (è il numero di righe non nulle nella forma a scala).

[Il rank è anche uguale al numero di colonne linearmente indipendenti (la dimostrazione è complicata)]

Def. Una matrice si dice in forma a scala se il primo elemento non nullo di ciascuna riga si trova a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{non è in forma a scala}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{è in forma a scala}$$

Somma di matrici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots \\ b_{21} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots \\ a_{21} + b_{21} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Prodotto di una matrice per uno scalare

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots \\ \lambda a_{21} & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Prodotto di una matrice per un vettore (colonna)

Dalla matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ e dal vettore $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

vogliamo ottenere

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

prodotto righe per colonne

Un sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

si scrive nella forma

$$\boxed{A \cdot X = B} \quad \text{dove } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

matrice del sistema colonna delle incognite colonna dei termini noti

Definiamo il prodotto righe per colonne tra due matrici:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \text{riga } i & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \text{colonna } j & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{mj} & \vdots \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \text{riga } i & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

riga i

colonna j

Esempi.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}$$

Nel prodotto di matrici è fondamentale che la lunghezza delle righe della prima matrice sia uguale alla lunghezza delle colonne della seconda matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 14 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$$

Attenzione: $AB \neq BA$, cioè il prodotto di matrici NON è commutativo!

Proprietà delle operazioni tra matrici

$$(1) (AB)C = A(BC) \quad \text{proprietà associativa}$$

$$(2) \quad AB \neq BA$$

$$(3) \text{ Esiste la matrice identita } I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

tale che $A \cdot I = A$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} (4) \quad A \cdot (B+C) &= AB + AC \\ (A+B) \cdot C &= AC + BC \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{proprietà} \\ \text{distributiva} \end{array}$$

Esempio. $\underbrace{(A+B)^2}_{\text{"}} = A^2 + \cancel{2AB} + B^2$

$$\begin{aligned} (A+B)(A+B) &= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Caso particolare del prodotto:

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m}_{\substack{\text{prodotto scalare tra} \\ \text{due vettori}}}$$

Nel caso dei numeri (reali o complessi), dato un numero $a \neq 0$ esiste il suo inverso a^{-1} tale che $a^{-1} \cdot a = 1$.

Se A è una matrice $\neq 0$ esiste A^{-1} tale che

$$\bar{A}^{-1} \cdot A = I \quad ? \quad (\text{oppure } A \cdot \bar{A}^{-1} = I \quad ?)$$

Se riusciamo a calcolare $\bar{A}^{-1}$, allora dato un sistema di equazioni lineari del tipo $Ax = B$ si ha:

$$\underbrace{\bar{A}^{-1} A}_I x = \bar{A}^{-1} B$$

si ottiene $x = \bar{A}^{-1} B$

Quindi si ottiene la soluzione del sistema.