Lezione10b

martedì 21 ottobre 2025 10:28

Somma di sottospazi

$U, W \leq V$

$U + W = \{ u + w \mid u \in U,\ w \in W \}$

$U = \langle u_1, \dots, u_h \rangle$

$W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ $\Rightarrow$ $U + W = \langle u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k \rangle$

Definizione: due sottospazi U e W di V si dicono in **somma diretta** se $U \cap W = \{ \vec{0} \}$.

$$U \oplus W = \{ u + w \mid u \in U,\ w \in W \}$$

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$

$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ $\quad$ $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

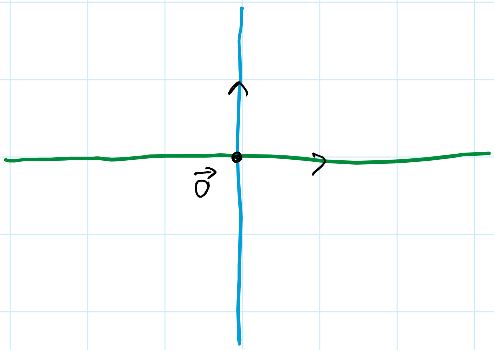
$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{cases} \cancel{x = a} \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad$ $a = x$

$U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 0 \}$

$U \cap W$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \in U \iff \underline{b = 0}$

$W = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \}$

$U \cap W = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$



$U \oplus W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \mathbb{R}^2$

Definizione: i vettori $v_1, \dots, v_n$ di V si dicono **linearmente indipendenti** se vale la seguente condizione:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \vec{0} \quad \text{se e solo se} \quad a_1=a_2=\dots=a_n=0.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\Longrightarrow}$$

I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono lineramente dipendenti se esiste una combinazione lineare

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \vec{0}$$

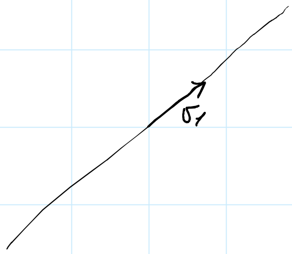
in cui almeno un coefficiente $a_i \neq 0$.

relazione di dipendenza

Esempi:

1) $n=1$ $\quad v_1$ è linearmente indipendente $\Longleftrightarrow$ $v_1 \neq \vec{0}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{se } v_1 \neq 0 \\ a_1 v_1 = \vec{0} \Longrightarrow a_1 = 0 \end{array}}$$



Se $v_1 = \{\vec{0}\}$ $\quad$ relazione di dipendenza $\quad 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$a_1 = 1 \neq 0$

2) I vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \quad \text{lin. ind.}$$

Due vettori v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti se e solo se

$a_1v_1 + a_2v_2 = \vec{0}$ con almeno uno tra a_1 e a_2 diverso da zero.

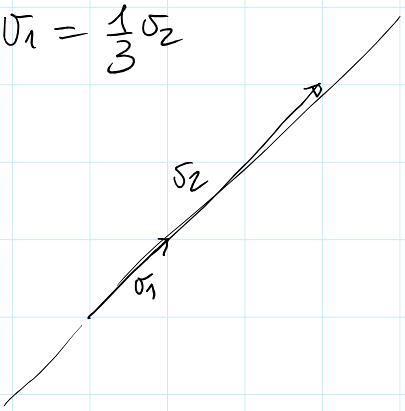
Se $a_1 \neq 0$ $\quad a_1v_1 = -a_2v_2 \quad$ $\boxed{v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2}$

Esempio $\quad v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \quad v_2 = 3v_1$

$\boxed{3 \cdot v_1 - 1 v_2 = \vec{0}}$ è una relazione di dipendenza.

$a_1 = 3$

$v_1 = \frac{1}{3}v_2$



Esempio: $e_1, \dots, e_n$ in $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti:

$$\sum_{i=1}^{n} a_ie_i = a_1\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + a_n\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \iff$$

$a_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$

Controesempio: $\mathbb{R}^4$ i vettori $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix}5\\8\\17\\23\end{pmatrix}$

$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ è

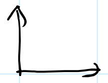
$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

una relazione di dipendenza

perché $a_3 = 1 \neq 0.$

$\mathbb{R}^3$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\qquad\quad e_1 \quad\;\; e_2 \quad\;\; \vec{0}$



Oss: Se $\{v_1, \dots, v_k, \vec{0}\}$ contiene $\vec{0}$ allora è linearmente dipendente.

Osservazione importante:
Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti e generano V allora ogni vettore di v si scrive in modo UNICO come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$.

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad \text{esistono unici i coeff. } a_i \text{ con } i = 1, \dots, n.$$

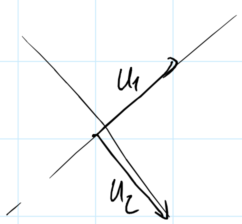
Definizione: un insieme $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori di V che generano V e sono linearmente indipendenti si chiama **base** di V.

Esempi: $\mathbb{R}^2$ $\qquad \mathcal{E} = \{e_1, e_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$.

$$a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$B = \left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}} \right\}$ genera $\mathbb{R}^2$

u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti perché non multipli:



Criterio di dipendenza:

Un insieme $S=\{v_1, \dots, v_k\}$ di vettori di V è linearmente dipendente se e solo se un vettore di S è combinazione lineare di tutti gli altri vettori di S.

$$S \text{ lin. dip.} \iff \exists\, v \in S : \quad v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle$$

Dim:

S lin. dip. $\iff$ esiste una relazione di dipendenza

$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$ con almeno un coeff. $a_i \neq 0$.

a meno di riordinare i vettori posso supporre $a_1 \neq 0$

$$a_1 v_1 = -a_2 v_2 - \dots - a_k v_k \qquad a_1 \neq 0 \quad \text{divido per } a_1$$

$$v_1 = \boxed{-\frac{a_2}{a_1} v_2 - \dots - \frac{a_k}{a_1} v_k} \in \langle v_2, \dots, v_k \rangle \qquad \square.$$

Esempio:

$$\left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \implies \text{sono lin. dip.}$$

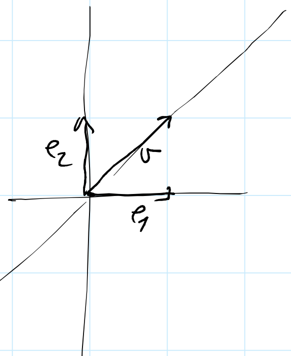
$$\boxed{v = e_1 + e_2}$$

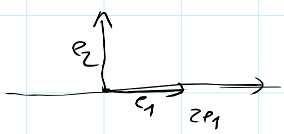
Relazione di dipendenza tra e_1, e_2, v

$e_1 + e_2 - v = \vec{0}$ è rel. di dip.

$1 \cdot e_1 + 1 e_2 + (-1) \cdot v = \vec{0}$

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2, v \rangle \begin{cases} = \langle e_1, e_2 \rangle \\ = \langle e_2, v \rangle \\ = \langle e_1, v \rangle \end{cases}$$





$\langle e_1, e_2, v \rangle = \langle e_2, v \rangle$ perché

$< e_1, e_2, v > = < e_2, v >$ perché

$1 \cdot e_1 + e_2 - v = \vec{0}$

$$< e_2, v > \subseteq < e_1, e_2, v > \subseteq < e_2, v >$$

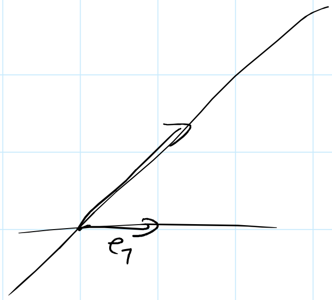
Per dimostrare che $< e_1, e_2, v > \subseteq < e_2, v >$ basta dimostrare

$e_1 \in < e_2, v >$ $\quad 1 \cdot e_1 = - e_2 + v \in < e_2, v >$

$e_2 \in < e_2, v >$ $\quad e_2 = 1 \cdot e_2 + 0 \cdot v$

$v \in < e_2, v >$ $\quad v = 0 \cdot e_2 + 1 \cdot v$

Basi:
- (A) Generatori
- (B) Linearmente indipendenti.



Teorema di estrazione di una base:

Sia $G = \{ v_1, \dots, v_k \}$ insieme di generatori di V.
Allora esiste una base $B \subseteq G$.

Dim:

Algoritmo:

Passo 1: i vettori di G sono linearmente indipendenti?
SI: Fine $B = G$ è una base. Se la risposta è No

Passo 2: Scrivere una relazione di dipendenza

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = \vec{0}$$ con almeno un coefficiente $a_i \neq 0$

allora l'insieme $\underline{G_1 = G \setminus \{ v_i \}}$ è ancora insieme di generatori.

Passo 3: ripartire dal passo usando l'insieme G_1 invece di G.

Dopo un numero finito di passi il procedimento termina con una base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$.

Esempio: $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}} \right\rangle \qquad v_4 = v_1 + 2v_3$$

$$\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}$$

estrarre una base $\mathcal{B}$ di U dall'insieme di generatori $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Passo 1: $\mathcal{G}$ è linearm. indipendente?

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$a_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+a_2+a_4\\0\\a_1+a_4\\a_2+a_3+2a_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_4=0\\ \cancel{0=0}\\ a_1+a_4=0\\ a_2+a_3+2a_4=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\cancel{-a_4}+a_2+\cancel{a_4}=0\\ a_1=-a_4\\ a_3+2a_4=0\end{cases} \qquad \begin{cases}a_2=0\\ a_1=-a_4\\ a_3=-2a_4\end{cases} \qquad \text{lin dip}$$

Scriviamo una relazione di dipendenza:

poniamo
$$\begin{cases}a_4=1\\ a_1=-1\\ a_2=0\\ a_3=-2\end{cases}$$

$$(-1)\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + (-2)v_3 + 1\cdot v_4 = \vec{0}$$

$$-v_1 - 2v_3 + v_4 = \vec{0}$$

v_4 compare con coeff. $\qquad v_4 = v_1 + 2v_3 \qquad$ allora lo elimino

$$\mathcal{G}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$$

G_1 è lin. indip.? $\quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = \vec{0}$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ a_1 \\ a_2 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ \cancel{0 = 0} \\ a_1 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ sono linearmente indipendenti quindi $\boxed{B = \{ v_1, v_2, v_3 \}}$

Oss: Nell'esercizio precedente

$U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ abbiamo dimostrato che $B = \{ v_1, v_2, v_3 \}$

sono una base $\quad -v_1 - 2v_3 + v_4 = \vec{0}$

anche

$$B' = \{ v_2, v_3, v_4 \} \text{ è base di } U.$$

$$B'' = \{ v_1, v_2, v_4 \} \text{ è base di } U.$$