

Esercizio 12

Esercizio

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{n^2 + n + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(n - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)} \\ &= \lim_n \frac{n - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = +\infty\end{aligned}$$

Diagrammatical annotations: Blue circles highlight the terms $-\frac{2}{n}$ and $\frac{1}{n^2}$ in the numerator, and $\frac{1}{n}$ and $\frac{3}{n^2}$ in the denominator. Blue arrows point from these circles to small blue circles labeled '0', indicating that these terms approach zero as $n \rightarrow \infty$.

Oss Con il polinomio funziona sempre
così:

$$a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \dots + a_1 n + a_0$$

$a_r \neq 0$, allora

$$\begin{aligned}\lim_n (a_r n^r + \dots + a_1 n + a_0) &= \\ &= \lim_n n^r \left(a_r + \frac{a_{r-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{n^{r-1}} + \frac{a_0}{n^r} \right) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow a_r}\end{aligned}$$

In questo caso, scrivo

$$a_r n^r + \dots + a_1 n + a_0 \approx a_r n^r$$

asintoticamente
uguale

e anzi, in generale:

Def. Scrivo $f(n) \approx g(n)$ (leggo: f asintoticamente uguale a g) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

In alcuni casi, se $f(n) \approx g(n)$ posso sostituire $g(n)$ con $f(n)$ nel calcolo di limiti

Esempio: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^4 - 5n^2 + 2n}$

$$\lim_n \frac{2n^2 - 3n + 1}{2n^2} = 1 \Rightarrow 2n^2 - 3n + 1 \approx 2n^2$$

$$\lim \frac{3n^4 - 5n^2 + 2n}{3n^4} = 1 \Rightarrow 3n^4 - 5n^2 + 2n \approx 3n^4$$

infatti:

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{2n^2} = \frac{2n^2 \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right)}{2n^2} \rightarrow 1$$

$$\frac{3n^4 - 5n^2 + 2n}{3n^4} = \frac{3n^4 \left(1 - \frac{5n^2}{3n^4} + \frac{2n}{3n^4} \right)}{3n^4} \rightarrow 1$$

Però anche:

$$\lim_n \left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^4 - 5n^2 + 2n} \right) = \lim_n \frac{2n^2}{3n^4}$$

però: $\frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^4 - 5n^2 + 2n} \approx \frac{2n^2}{3n^4} \quad (*)$

e se $f(n) \approx g(n) \Rightarrow \lim_n \frac{f(n)}{g(n)} = 1$

$$\Rightarrow \lim_n f(n) = \lim_n g(n).$$

(*) Faule:

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^4 - 5n^2 + 2n} \cdot \frac{1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}}{1 - \frac{5}{3n^2} + \frac{2}{3n^3}} = \frac{\frac{2n^2}{3n^4}}{1 - \frac{5}{3n^2} + \frac{2}{3n^3}} \rightarrow 1$$

CALCOLI SOPRA

donc

$$\lim_n \frac{2n^2 - 3n + 1}{3n^4 - 5n^2 + 2n} = \lim_n \frac{2n^2}{3n^4} = \lim_n \frac{2}{3n^2} = 0$$

Exemples

$$\lim_n \left(\frac{\sqrt{5n^3 + 2n^2 - n + 4} - 5}{n^2 - 2n + 3} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{\sqrt{5n^3 + 2n^2 - n + 4} - 5}{n^2 - 2n + 3} \cdot \frac{\sqrt{5n^3 + 2n^2 - n + 4} + 5}{\sqrt{5n^3 + 2n^2 - n + 4} + 5} \right)$$

$$= \lim_n \frac{5n^3 + 2n^2 - n + 4 - 25}{(n^2 - 2n + 3)(\sqrt{5n^3 + 2n^2 - n + 4} + 5)} =$$

$$= \lim_n \frac{n^3 \left(5 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{21}{n^3} \right)}{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) \cdot \sqrt{n^3} \left(\sqrt{5 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3}} + \frac{5}{\sqrt{n^3}} \right)}$$

$$= \lim_n \frac{n^3}{n^{2+3/2}} \cdot \left(\frac{5 + 2/n - 1/n^2 - 21/n^3}{\sqrt{5 + 2/n - 1/n^2 + 4/n^3} + \frac{5}{\sqrt{n^3}}} \right)$$

$$\frac{n^3}{n^{7/2}} = n^{\frac{6-7}{2}} = n^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) \left(\sqrt{5 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}} + \frac{5}{\sqrt{n^3}} \right) = 0.$$

$\rightarrow \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
 $\rightarrow \sqrt{5}$

Oss. Proprietà delle potenze:

Ricordo che

(•) $A^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{A}$	} Utilizzate per calcolare	$\frac{n^3}{n^{2+3/2}} = n^{3-(2+\frac{3}{2})}$ $= n^{3-\frac{7}{2}}$ $= n^{\frac{6-7}{2}}$ $= n^{-1/2}$ $= \frac{1}{\sqrt{n}}$
(•) $A^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{A^n}$		
(•) $A^a \cdot A^b = A^{a+b}$		
(•) $A^{-1} = \frac{1}{A}$		
(•) $\frac{A^a}{A^b} = A^{a-b}$		

Qn Potero anche evitare di razionalizzare e raccogliere subito

↓
Moltiplicare e dividere per
 $\sqrt{5n^3+2n^2-n+4} - 5$

Pens', talvolta questa tecnica semplifica il calcolo.

Qs2 Potero anche fare così:

$$\lim_n \frac{\sqrt{5n^3+2n^2-n+4} - 5}{n^2-2n+3}$$

Sottinteso $\sqrt{5n^3+2n^2-n+4} \approx \sqrt{5n^3}$
 $n^2-2n+3 \approx n^2$

$$\lim_n \frac{\sqrt{5n^3+2n^2-n+4} - 5}{n^2-2n+3} = \lim_n \frac{\sqrt{5n^3}}{n^2} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Devo verificare che

$$\lim_n \frac{\sqrt{5n^3+2n^2-n+4} - 5}{n^2-2n+3} \cdot \frac{\sqrt{5n^3}}{\sqrt{5n^3}} = 1$$

ATTENZIONE

$$\lim_n \frac{\sqrt{2n^2-2} - \sqrt{2n^2+n}}{\sqrt[3]{n}}$$

SBAGLIATO: $\sqrt{2n^2-2} \approx \sqrt{2n^2} = n\sqrt{2}$
 $\sqrt{2n^2+n} \approx \sqrt{2n^2} = n\sqrt{2}$

$$\lim_n \frac{\sqrt{2n^2-2} - \sqrt{2n^2+n}}{\sqrt[3]{n}} = \lim_n \frac{n\sqrt{2} - n\sqrt{2}}{\sqrt[3]{n}} = \lim_n \frac{0}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$