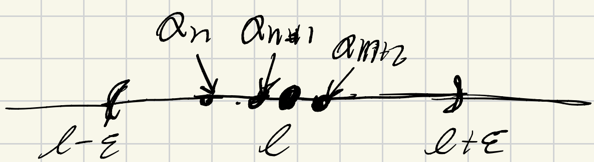
Lezioni 13

Def Sia $n \mapsto a_n$ una successione di numeri reali.

(1) $\lim_{n} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}$ t.c.

$\left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right)$ $\forall n \geq N$,

$\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right)$ $\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$.



(2) $\lim_{n} a_n = +\infty$ se $\forall M \geq 0$, esiste $N \in \mathbb{Z}$ t.c. $a_n \geq M$, $\forall n \geq N$.

(3) $\lim_{n} a_n = -\infty$ se $\forall M \geq 0$ esiste $N \in \mathbb{Z}$ t.c. $\forall\, a_n < -M$, $\forall n \geq N_0$.

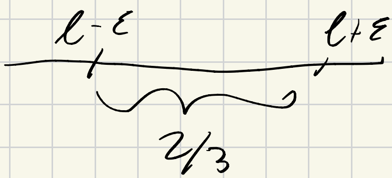
Oss Può essere che una successione non abbia limite, cioè non rispetti né la

(1) né la (2) né la (3) sopra.

Esempio: $a_n = (-1)^n$ non ha limite.

Mostro che non esiste nessun l come in 1. Se esistesse, potrei prendere per esempio $\varepsilon = 1/3$, ma allora, comunque scelga l, avrò infiniti valori di $(-1)^n$ che non sono compresi nell'intervallo

$$l-\varepsilon \le x \le l+\varepsilon$$



perciò se $l-\varepsilon \le 1 \le l+\varepsilon$, allora

$$-1 \notin \{l-\varepsilon \le x \le l+\varepsilon\}$$

e viceversa se

$$l-\varepsilon \le -1 \le l+\varepsilon \quad \text{allora}$$

$$1 \notin \{l-\varepsilon \le x \le l+\varepsilon\}.$$

Perciò, scelto N, non è mai vero che, $\forall n \geq N$, si abbia che

$$(-1)^n \in \{ l-\varepsilon \leq x \leq l+\varepsilon \}.$$

Perciò, $\lim_n a_n$ non può essere $l \in \mathbb{R}$, per nessuna scelta di $l \in \mathbb{R}$. Quindi, es (1) non vale.

Poi non verifica (2) e (3) perché

$$|a_n| = |(-1)^n| = 1, \quad \forall n.$$

(notare che scelto $M \geq 2$, ad esempio, per nessun n si ha $(-1)^n > M$, e scelto $M' = -2$, per nessun n si ha che $(-1)^n < M'$.

<u>Esercizio</u> Mostrare che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Devo mostrare, seguendo la definizione con $l = 0$, che $\forall\ \varepsilon > 0$, esiste N t.c.

$$|a_n| \leq \varepsilon. \quad (\Leftrightarrow 0-\varepsilon \leq a_n \leq 0+\varepsilon).$$

per ogni $n \geq N$.

Scelgo N tale che $\frac{1}{N} < \varepsilon$: basta che $N > \frac{1}{\varepsilon}$, allora $\forall n \geq N$ ho:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

Perciò la (1) è soddisfatta! dunque

$$\lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

<u>Massimo</u>, <u>minimo</u>, <u>estremo superiore</u>, <u>inferiore</u>

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsieme:

<u>Def</u> Dico che

(1) $\max(A) = M \in \mathbb{R}$ se per ogni $a \in A$, $a \leq M$ e $M \in A$.

(1) $\min(A) = m \in \mathbb{R}$ se per ogni $a \in A$, $m \leq a$, $m \in A$.

<u>Oss</u> massimo e minimo sono elementi di A.

Esempio $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \geq 0 \right\}$

$$= \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

Allora

$\min(A) = 0$: $0 \in A$ ed è $\leq$ di qualunque altro elemento di A.

Invece A non ha massimo. Basta osservare che la successione

$$n \longmapsto a_n = \frac{n}{n+1}$$

è strettamente crescente, cioè

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1} = a_n$$

(esercizio: già abbiamo mostrato che

$$\frac{n+1}{n+2} \geq \frac{n}{n+1}, \ \forall n;$$

d'altra parte $\underbrace{\frac{n+1}{n+2} \neq \frac{n}{n+1}}_{\checkmark}$, $\forall n$

se $\frac{n+1}{n+2} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow (n+1)^2 = n(n+2)$
$\Rightarrow 1 = 0$, contraddizione.)

Poichè $n \mapsto a_n$ è strettamente crescente, cioè $a_{n+1} > a_n$, $\forall n$, non può avere massimo.

Definizione $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme. Dico che
(1) $\sup(A) = M$ se $M \geq a$, $\forall a \in A$, ed è il minimo tra tutti i numeri reali che sono $\geq a$, $\forall a \in A$; cioè:

$$\boxed{\begin{array}{l} M = \sup(A) \text{ se } M \geq a, \forall a \in A \text{ e} \\ \forall \ell \text{ tale che } \ell \geq a \text{ per ogni } a \in A, \text{ si ha} \\ M \leq \ell \end{array}}$$

(1) $\inf(A) = m$ se $m \leq a$, $\forall a \in A$ ed è il massimo tra tutti i numeri reali che sono $\leq a$, $\forall a \in A$, cioè:

$$\boxed{\begin{array}{l} m = \inf(A) \text{ se } m \leq a, \forall a \in A \text{ e} \\ \forall \ell \text{ tale che } \ell \leq a \text{ per ogni } a \in A, \text{ si ha } \ell \leq m \end{array}}$$

Esempio

(∘) $\sup\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \geq 0 \right\} = 1.$

Infatti, $\frac{n}{n+1} \leq 1, \forall n.$

Poi: se $l \geq \frac{n}{n+1}, \forall n$, allora l non può essere più piccolo di 1, dunque $l \geq 1$, ma allora 1 è il sup per definizione.

(∘) $\inf\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \geq 0 \right\} = \min\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \geq 0 \right\} = 0.$

Oss $n \mapsto \frac{n}{n+1}$ non ha massimo, ma ha estremo superiore; ha sia minimo che inf, coincidenti.

In generale, non si richiede che $\sup(A)$, e $\inf(A)$ appartengano ad A, mentre si richiede che $\max(A)$, $\min(A)$ appartengano ad A. Se A ammette massimo, allora ammette anche sup e

$$\sup(A) = \max(A).$$

Se A ammette minimo, allora ammette anche inf e

$$\inf(A) = \min(A).$$

Calcolo dei limiti

Regole: se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, allora

(a) $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + b$

$\lim_{n} (a_n - b_n) = a - b$

(·) $\lim_{n} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(·) $\lim_{n} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ se $b_n \neq 0$ $\forall n$, $b \neq 0$

(·) $\lim_{n} a_n^{b_n} = a^b$.

Oss Tutte queste regole di calcolo si

dimostriamo usando la definizione.
Valgono poi altre regole

<u>Regola di permanenza del segno</u>:

Se $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$a_n \geq b_n, \forall n \Rightarrow a \geq b$.

Nel caso in cui i limiti siano $\pm\infty$, 0
valgono le seguenti regole (che di nuovo
posso dimostrare con la definizione):

(◦) $\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_n b_n = \pm\infty$.

allora $\lim_n (a_n + b_n) = \pm\infty$

(faccio comportamento $a + \infty = +\infty$
$a - \infty = -\infty$).

(◦) $\lim_n a_n = +\infty$, $\lim_n b_n = +\infty$, allora

$\lim_n (a_n + b_n) = +\infty$

$\lim_n a_n = -\infty$, $\lim_n b_n = -\infty$

$\lim (a_n + b_n) = -\infty$

(o) $\lim_n a_n = a \neq 0$, $\lim_n b_n = +\infty$

$$\lim_n (a_n b_n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$\lim_n a_n = a \neq 0$, $\lim_n b_n = -\infty$

$$\lim_n (a_n b_n) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

(o) $\lim_n a_n = 0$, $\lim_n b_n = \infty$

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = \infty$$

<u>Oss.</u> Nelle ultime due, attenzione ai segni! Se ad esempio

$\lim_n a_n = 0$, $a_n < 0$

$$\lim_n b_n = +\infty$$

allora

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = -\infty$$

$$\frac{b_n}{a_n} < 0 \text{ per } n \text{ abbastanza grande.}$$

(poiché $\lim_n b_n \to +\infty$, $b_n > 0$ per n abbastanza grande, dunque $\frac{b_n}{a_n} < 0$ per n abbastanza grande perché $a_n < 0$).

Oss. FORMULE INDETERMINATE

(∘) $\boxed{+\infty - \infty \quad \left(\lim_n (a_n - b_n) \text{ con } \lim_n a_n = +\infty,\ \lim_n b_n = +\infty \right)}$

(∘) $0 \cdot \infty$

(∘) $\frac{0}{0}$

(∘) $\boxed{\frac{\infty}{\infty} \qquad \lim \frac{a_n}{b_n},\ \lim_n a_n = \infty,\ \lim_n b_n = \infty}$

(attenzione: varianti 4 formule diverse: $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$).

Mostro che $+\infty - \infty$ è una forma indeterminata, nel senso che può avere vari limiti:

(•) $a_n = n^2+2n$, $b_n = n^2+1$

$\lim_n a_n = +\infty$, $\lim_n b_n = +\infty$

(verificare tramite definizione)

usare le formule!

$\lim_n n = +\infty \Rightarrow \lim_n 2n = +\infty$

$\lim_n n \cdot n = \lim_n n^2 = +\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$$\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n (n^2+2n-(n^2+1)) = \lim_n (2n-1) = +\infty.$$

(verifica tramite definizione)

(•) $a_n = n^2+2n$, $b_n = n^2+2n-\frac{1}{n}$

$\lim_n a_n = +\infty$, $\lim_n b_n = +\infty$

$$\lim_n (a_n - b_n) = \lim_n (n^2+2n-(n^2+2n-\tfrac{1}{n}))$$

$$= \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Oss. Voglio giustificare

$$\lim_n \left(n^2 + 2n - \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

So: $\lim_n n^2 = \lim_n (n \cdot n) = +\infty$

$\lim_n n = +\infty$ $\quad$ $\lim_n a_n = +\infty$

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$

$$\lim_n 2n = +\infty$$

$\lim_n 2 = 2$ $\quad$ $\lim_n n = +\infty$

$2(+\infty) = +\infty$

$\lim_n \frac{1}{n} = 0$ (visto prima)

$$\lim_n \Big(\underbrace{n^2}_{+\infty} + \underbrace{2n}_{+\infty} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\Big) = +\infty.$$

Esempi di calcolo di limiti

(1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n-3}{n+4}$ Forma indeterminata

Noto che è una F.I. $\frac{\infty}{\infty}$.

Noto che:

$$\frac{2n-3}{n+4} = \frac{\cancel{n}(2-3/n)}{\cancel{n}(1+4/n)} = \frac{2-\frac{3}{n}}{1+4/n}$$

Uso la freccia per indicare il limite, così

$\lim a_n = a$ scrivo $a_n \to a$

leggo "a_n tende ad a"

Allora

$$\frac{2-\frac{3}{n}}{1+4/n} \Longrightarrow \frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} \Longrightarrow$$

$\frac{3}{n} \to 0$, $4/n \to 0$, $2-\frac{3}{n} \to 2$, $1+\frac{4}{n} \to 1$

$$\Longrightarrow \lim_n \frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Però

$$\lim_{n} \frac{2n-3}{n+4} = \lim_{n} \frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} = 2.$$

Es.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-2n+1}{n^2+n+3} = \lim_{n} \frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} =$$

$$= \lim_{n} \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = 1.$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$