Sottospazi vettoriali

1° Modo Equazioni cartesiane

$V = \mathbb{R}^3$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y+3z=0 \\ x-z=0 \end{array} \right\} \qquad A\underline{x} = \underline{0}$$

2° Modo equazioni parametriche – Forma parametrica

Risolvere il sistema delle equazioni cartesiane.

$$\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z+y+3z=0 \\ x=z \end{cases} \quad \begin{cases} y+4z=0 \\ x=z \end{cases} \quad \begin{cases} y=-4z \\ x=z \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} a \\ -4a \\ a \end{pmatrix}$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -4z \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$$ Forma parametrica

$$\begin{cases} x = a \\ y = -4a \\ z = a \end{cases}$$ Equazioni parametriche

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} a \\ -4a \\ a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}}$$

2 eq. par $\Rightarrow$ 1 eq. cart. Metodo di eliminazione dei parametri.

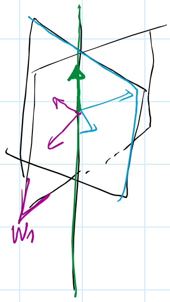
$$\begin{cases} \cancel{x = a} \\ y = -4a \\ z = a \end{cases} \qquad a = x \qquad \begin{cases} y = -4x \\ z = x \end{cases}$$ equazioni cartesiane di U.

3° Modo con generatori:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -4a \\ a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} = \boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \leq \mathbb{R}^3$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ è generatore di U.

Osservazione: $U: \begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$



$W_1: \quad x+y+3z=0$

$W_2: \quad x-z=0$

$$U = \underbrace{W_1 \cap W_2}_{1^\circ \text{ modo}} = \boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

2° modo

3° modo

$W_1: \quad x+y+3z=0$

$y = -x-3z$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x-3z \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a-3b \\ b \end{pmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} x=a \\ y=-a-3b \\ z=b \end{cases} \quad \text{eq. param.}$$

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$a=1, \; b=0 \qquad a=0, \; b=1$

$W_2: \quad x-z=0$

$x=z$

$$\left\{ \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} b \\ a \\ b \end{pmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$a=1, \; b=0 \qquad a=0, \; b=1$

$a=y$

$$z=x \qquad \begin{cases} \cancel{y=a} \\ z=x \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} \cancel{x=b} \\ y=a \\ z=b \end{cases} \quad b=x$$

Domanda 1:

$K=\mathbb{R}$

1. **Dimostrare che dati U, W sottospazi di uno stesso K-spazio vettoriale V allora l'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio di V.** (Lez. 8).

Dimostrazione:

Ipotesi: $U \leq V$, $W \leq V$

Tesi: $U \cap W \leq V$.

Dimostriamo le 3 condizioni di sottospazio:

⓪ $\vec{0} = 0_V$ appartiene a $U \cap W$

$\left.\begin{array}{lll} \vec{0} \in U & \text{perché} & U \leq V \\ \vec{0} \in W & \text{perché} & W \leq V \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{0} \in U \cap W$

① Chiusura per la somma:

dimostriamo che $\forall\ v_1, v_2 \in U \cap W$ allora $v_1 + v_2 \in U \cap W$.

$v_1 \in U \cap W \Longrightarrow v_1 \in U$

$v_2 \in U \cap W \Longrightarrow v_2 \in U$

$U \leq V \Rightarrow U$ chiuso per la somma $\Longrightarrow \underline{v_1 + v_2 \in U}$

$v_1 \in U \cap W \Longrightarrow v_1 \in W$

$v_2 \in U \cap W \Longrightarrow v_2 \in W$

$W \leq V \Rightarrow W$ chiuso per la somma $\Longrightarrow \underline{v_1 + v_2 \in W}$

perciò $v_1 + v_2 \in U \cap W$.

② Chiusura per prodotto per scalari:

$\forall\ v \in U \cap W$ $\forall\ a \in \mathbb{C}$ (oppure $a \in \mathbb{R}$) dimostriamo $av \in U \cap W$.

$v \in U \cap W \Longrightarrow v \in U$ $\quad U \leq V$ è chiuso per prodotto per scalari $\Longrightarrow av \in U.$

$v \in U \cap W \Longrightarrow v \in W$ $\quad W \leq V$ è chiuso per prodotto per scalari $\Longrightarrow av \in W.$

$\Longrightarrow$

$av \in U \cap W.$ □

Esempio: in $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Determinare $U \cap V$, (generatori).

Svolg:

$$V = \left\{ a\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \; a,b\in\mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}3b\\a+b\\a\\0\end{pmatrix} \middle| \; a,b\in\mathbb{R} \right\} \qquad \begin{cases} x_1 = 3b \\ x_2 = a+b \\ \cancel{x_3 = a} \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

eq. parametriche di V.

$a = x_3$

Metodo di eliminazione dei parametri:

$$\begin{cases} x_1 = 3b \\ \cancel{x_2 = x_3 + b} \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad b = x_2 - x_3 \qquad V: \begin{cases} x_1 = 3x_2 - 3x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$V: \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad U = \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$u \in U \qquad u = a\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+b\\2a-b\\-a+b\\a-b\end{pmatrix} \qquad a=b$$

$$u \in V \quad \begin{cases} (2a+b) - 3(2a-b) + 3(a+b) = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

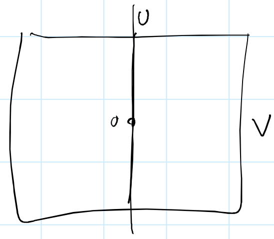
Sostituisco $a=b$ nella 1° eq.

$$\begin{cases} 3\cancel{b} - 3\cancel{b} + 3(\cancel{-b+b}) = 0 \\ a = b \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ a = b \end{cases}$$

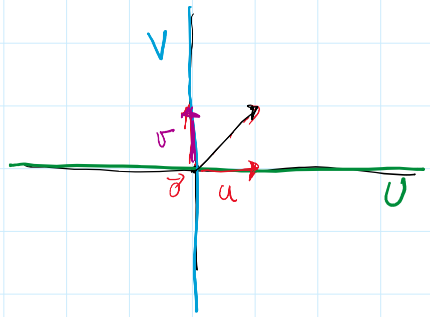
$$U\cap V = \left\{ \begin{pmatrix}2b+b\\2b-b\\-b+b\\b-b\end{pmatrix} \middle| \; b\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}3b\\b\\0\\0\end{pmatrix} \middle| \; b\in\mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

Generatore di $U\cap V$ è $\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Domanda: l'unione di sottospazi è sottospazio?



$U \subseteq V$



$u \in U \setminus V$

$v \in V \setminus U$

$u+v \notin U$

$u+v \notin V$

Nota bene: dati U e V sottospazi vettoriali di uno stesso spazio vettoriale

$U \cup V$ è sottospazio $\iff$ $U \subseteq V$ oppure $V \subseteq U$

Definizione: dati U e W sottospazi di un medesimo spazio vettoriale V definiamo

$$U+W = \{ u+w \mid u \in U, w \in W \}$$ somma dei

sottospazi U e W.

Proposizione: se U e W sono sottospazi di V

1. $U+W \leq V$
2. se $Z \leq V$ che contiene sia U che W allora Z contiene $U+W$

$$\text{se } \left.\begin{array}{l} U \subseteq Z \\ \text{e } W \subseteq Z \end{array}\right\} \implies U+W \subseteq Z.$$

Dim:

1. ⓪ $\vec{0} \in U+W$ $\qquad \vec{0} = \underbrace{\vec{0}}_{u} + \underbrace{\vec{0}}_{w}$

$u = \vec{0} \in U$ perché $U \leq V$

$w = \vec{0} \in W$ perché $W \leq V$

② Chiusura per prodotto per scalari:

$u+w \in U+W$ con $u \in U$ $w \in W$

$a \in \mathbb{R}$ dimostriamo che $a(u+w) \in U+W$

$$a(u+w) = \underbrace{(au)}_{U} + \underbrace{(aw)}_{W} \in U+W.$$

$au \in U$ $aw \in W$.

Osservazione:

Se $U = \langle u_1, \dots, u_h \rangle$

$W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ allora

$$U+W = \langle u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k \rangle$$

$$U+W = \{ u+w \mid u \in U, w \in W \} =$$

$$= \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{h} a_i u_i}_{u} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} b_j w_j}_{w} \;\middle|\; a_1, \dots, a_h, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R} \right\} =$$

$a_1u_1 + \dots + a_hu_h + b_1w_1 + \dots + b_kw_k$

$$= \langle u_1, \dots, u_h, w_1, \dots, w_k \rangle$$

Esempio:

Se $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Determinare $U+V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Esercizio:

- ***ESERCIZIO 1.*** Fissato in $\mathbb{R}^4$ il ~~prodotto scalare standard~~, si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

4. Dato

$$W : \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare ~~una base~~ generatori di $U \cap W$ ed equazione cartesiana per $U + W$.

Svolgimento:

$U \cap W$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3°-1°}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 1°R \\ 2°R \\ 4°R \\ 2°+3° \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 \\ x_2 = -3x_3 - x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4x_4 - 2x_4 = 2x_4 \\ x_2 = -3x_4 - x_4 = -4x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_4 \\ -4x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - 2x_3 = 3x_3 + x_4 - 2x_3 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -3x_3 - x_4 \end{cases}$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 + x_4 \\ -3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W : \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 = 2x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U+W = \left\langle \overset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{u_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{w_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Mettere i vettori in riga in una matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle u_1, u_2, w_1, w_2 \rangle$$
$$\parallel$$
$$\langle 3u_1, u_2, w_1, w_2 \rangle$$

$$u_1 = \frac{1}{3}(3u_1) + 0u_2 + 0w_1 + 0w_2$$

$$w_1 = 0 \cdot 3u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot w_1 + 0w_2$$

Osservazione:

Facendo operazioni elementari sulle righe NON CAMBIA il sottospazio generato dalle righe.

$$\xrightarrow[\substack{2^\circ - 1^\circ \\ 4^\circ - 2 \cdot 1^\circ}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_{23}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3^\circ - 2 \cdot 2^\circ \\ 4^\circ - 6 \cdot 2^\circ}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[4^\circ - 3^\circ]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U+W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$