Definizione:

Dato un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V

$v_1, \dots, v_n$ vettori di V

$a_1, \dots, a_n$ numeri reali

$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ viene detta **combinazione lineare** c.l.

dei vettori $v_1, \dots, v_n$ con coefficienti $a_1, \dots, a_n$.

Osservazione:

Se $U \leq V$ e $u_1, \dots, u_n$ sono vettori di U

$a_1, \dots, a_n$ numeri reali

$\Longrightarrow$ la c.l. $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in U$.

Esempi:

$V = \mathbb{R}^3$ $\quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 0 \right\}$

$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

la c.l. $a u_1 + b u_2 = a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2b \\ a - 5b \\ 0 \end{pmatrix} \in U$

Esercizio: Scrivere la combinazione lineare dei vettori

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ con coefficienti

$a_1 = 2$ $\quad a_2 = 1$ $\quad a_3 = 3$ $\quad a_4 = 0$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 0 - 3 + 0 \\ 2 + 1 + 0 + 0 \\ 2 + 3 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Esempio:

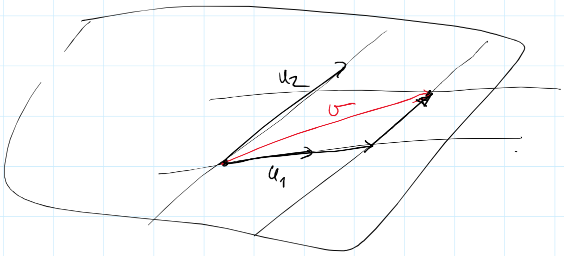
$\mathbb{R}^4$ $\quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$

Risolviamo il sistema lineare $\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$

$$U=\left\{\begin{pmatrix}-x_2+x_4\\ x_2\\ -x_4\\ x_4\end{pmatrix} \;\middle|\; x_2,x_4\in\mathbb{R}\right\} =$$

$$=\left\{ x_2\underset{\substack{x_2=1\\ x_4=0}}{\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}} + x_4\underset{\substack{x_2=0\\ x_4=1}}{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}} \;\middle|\; x_2,x_4\in\mathbb{R}\right\} =$$

$$=\left\{ x_2\underline{u}_1+x_4\underline{u}_2 \;\middle|\; x_2,x_4\in\mathbb{R}\right\} \qquad u_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad u_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$



Definizione:

Dato uno spazio vettoriale V esso si dice **finitamente generato** se esistono un numero finito di vettori $v_1,\dots,v_n$ tali che

$$V=\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \;\middle|\; a_i\in\mathbb{R} \quad \forall\, i=1,\dots,n\right\}.$$

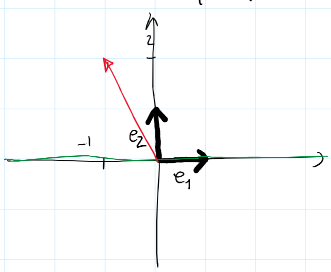
I vettori $v_1,\dots,v_n$ vengono detti **generatori di V**.

Esempi:

1) $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \qquad e_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad e_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

Vettori della base canonica



$$v=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ è finitamente generato con generatori $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

2) $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_1\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}} + x_2\underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}} + \cdots + x_n\underset{e_n}{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}}$$

$$e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow \text{Riga i-esima} \qquad e_1,\dots,e_n \text{ generano } \mathbb{R}^n$$

3) $M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$

$$= a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{11}} + a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{12}} + a_{21} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{21}} + a_{22} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_{22}}$$

e_{ij} che ha entrate tutte nulle tranne quella nel posto ij che vale 1.

$M_{m,n}(\mathbb{R})$ ha generatori e_{ij} $\quad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$

mn generatori.

Definizione:
Dati $v_1,\dots,v_n$ vettori di uno spazio vettoriale V

$$\langle v_1,\dots,v_n\rangle = \mathrm{span}(v_1,\dots,v_n) =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \;\; \forall\, i=1,\dots,n \right\}$$

sottospazio vettoriale generato da $v_1,\dots,v_n$

Esempi:

$\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$

$M_{2,2}(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

polinomio

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \;\middle|\; \begin{matrix} a_i \in \mathbb{R} \\ d \in \mathbb{N} \end{matrix} \;\; \forall\, i=0,\dots,d \right\} =$$

$$= \langle 1, x, x^2, \dots, x^d, x^{d+1} \dots\dots \rangle = \langle \{ x^i \mid i \in \mathbb{N} \} \rangle$$

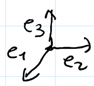
insieme infinito di generatori.

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ primo vettore della base canonica

$\mathbb{R}^3$ $\quad e_1 = \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\quad e_2 = \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\quad e_3 = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proposizione:

Dati $v_1, \dots, v_n$ vettori di V

① $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è sottospazio di V

② se $W \leq V$ e $v_1, \dots, v_n$ appartengono a W allora $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq W$.

Dim:

①

⓪ $\vec{0} \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n \right\}$

$$\vec{0} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

① Chiusura per la somma

$u_1 \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \qquad u_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

$u_2 \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \qquad u_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$

$$u_1 + u_2 = (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + (b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) =$$

$$= \underbrace{(a_1 + b_1) v_1}_{a_1 v_1 + b_1 v_1} + \underbrace{(a_2 + b_2) v_2}_{a_2 v_2 + b_2 v_2} + \dots + \underbrace{(a_n + b_n) v_n}_{a_n v_n + b_n v_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

è una c.l. di $v_1, \dots, v_n$.

② Chiusura per prodotto per scalari:

se $u \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \qquad u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

$a \in \mathbb{R}$

dimostriamo che $au \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$$au = a \left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right) = a(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) =$$

$$= a a_1 v_1 + a a_2 v_2 + \dots + a a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} (a a_i) v_i \qquad \text{c.l.}$$

② Se $W \leq V$ e W contiene $v_1, \dots, v_n$ essendo W chiuso per c.l. W contiene $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$. □

Esempio: $V = \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che U è un sottospazio e trovare un insieme di generatori per U.

Svolg:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3°R-3\cdot 1°R]{2°R-1°R}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3°R-2\cdot 2°R]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$3°R = 2\cdot 2°R$ $\qquad$ $3°R - 2\cdot 2°R = (0\ 0\ 0\ 0 \mid 0)$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

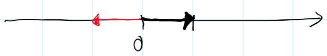
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

per la propos.

$$= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^4$$

U è generato da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Domanda 1: i generatori sono unici?



$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

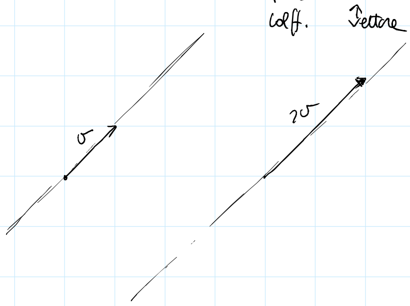
$\mathbb{R}^n \qquad e_1 \quad \dots \quad e_n$

$\mathbb{R}^1 \qquad e_1 = 1 \qquad \mathbb{R} = \langle 1 \rangle \qquad x = x\cdot 1 = \frac{x}{5}\cdot 5$

$\qquad = \langle 5 \rangle$

$x = (-x)(-1)$

$\mathbb{R} = \langle \frac{2}{3} \rangle \qquad x = \underbrace{\left(\frac{3x}{2}\right)}_{\text{coeff.}} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{vettore}}$



Domanda 2: è vero che se $\{u_1, \dots, u_k\}$ genera V allora tutti gli altri insiemi di generatori hanno k vettori?

$\mathbb{R}$ è generato da un solo vettore $\{1\}$ $\qquad V = \mathbb{R}$

$\{1, 7\} \qquad \langle 1, 7 \rangle = \mathbb{R}$

$X = x \cdot 1 + 0 \cdot 7$ è c.l. dei vettori 1 e 7 con coeff. x e 0

Se $v_1, \dots, v_n$ generano V aggiungiamo un vettore $w \in V$ allora $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V = \langle v_1, \dots, v_n, w \rangle$

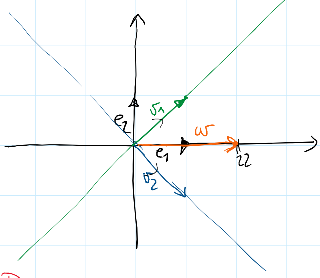
$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + 0w.$$

$$\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 v_2$ $\quad$ $v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$

Esercizio: dimostrare che $\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}} \right\}$ genera $\mathbb{R}^2$.

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



$$3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

Dim:

$$\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\a-b\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a+b \\ y = a-b \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 2a \\ x-y = 2b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$w = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ $x=2$, $y=0$ $\quad$ $a=1$, $b=1$

$$\begin{cases} x+y = a+\cancel{b}+a-\cancel{b} = 2a \\ x-y = a+b-a+b = 2b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$