

Lezione 6

giovedì 16 ottobre 2025

14:30

Sistemi lineari e matrici

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -6 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 \\ 2 & -1 & 2 & | & 2 \\ -2 & 3 & 5 & | & -6 \end{pmatrix}}_{\text{matrice}} = A$$

Matrice $m \times n$ (m righe e n colonne)

$M(m, n) = \{ \text{insieme delle matrici } m \times n \} = \mathbb{R}^{m \cdot n}$
quindi è uno spazio vettoriale.

Per risolvere il sistema voglio arrivare a una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} | * & * & - & - & * \\ 0 & | * & & & \vdots \\ 0 & 0 & | * & & \\ \vdots & \vdots & 0 & | * & \\ 0 & 0 & 0 & - & - \end{pmatrix} \leftarrow \text{forma a scala}$$

Operazioni permesse:

- (1) Scambiare due righe fra di loro.
- (2) moltiplicare o dividere tutta una riga per un numero (scalare) $\neq 0$.
- (3) sommare o sottrarre a una riga un multiplo di un'altra riga.

(Operazioni elementari sulle righe)

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 1 \\ -2 & 3 & 5 & : & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 2 & 7 & : & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

alla 3^a riga sommo la prima

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 0 & 3 & : & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ \rightarrow 1x_2 + 2x_3 = 1 \\ \rightarrow 3x_3 = -6 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11}{2} \\ x_2 = 5 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

3^a riga - 2 × 2^a riga

Esempio di altra applicazione

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^4$, U generato da

$$u_1 = (1, -1, 0, 2), \quad u_2 = (-1, -3, 2, 0), \quad u_3 = (2, 0, -1, 3)$$

(a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base di U .

Soluzione.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1^a riga + 1^a riga
3^a riga - 2 × 1^a riga

2 × 3^a riga + 2^a riga

Quindi $\dim U = 2$ e una base è u_1, u_2 .