



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento
di Ingegneria Industriale

Le pompe alternative

Corso di Macchine 1

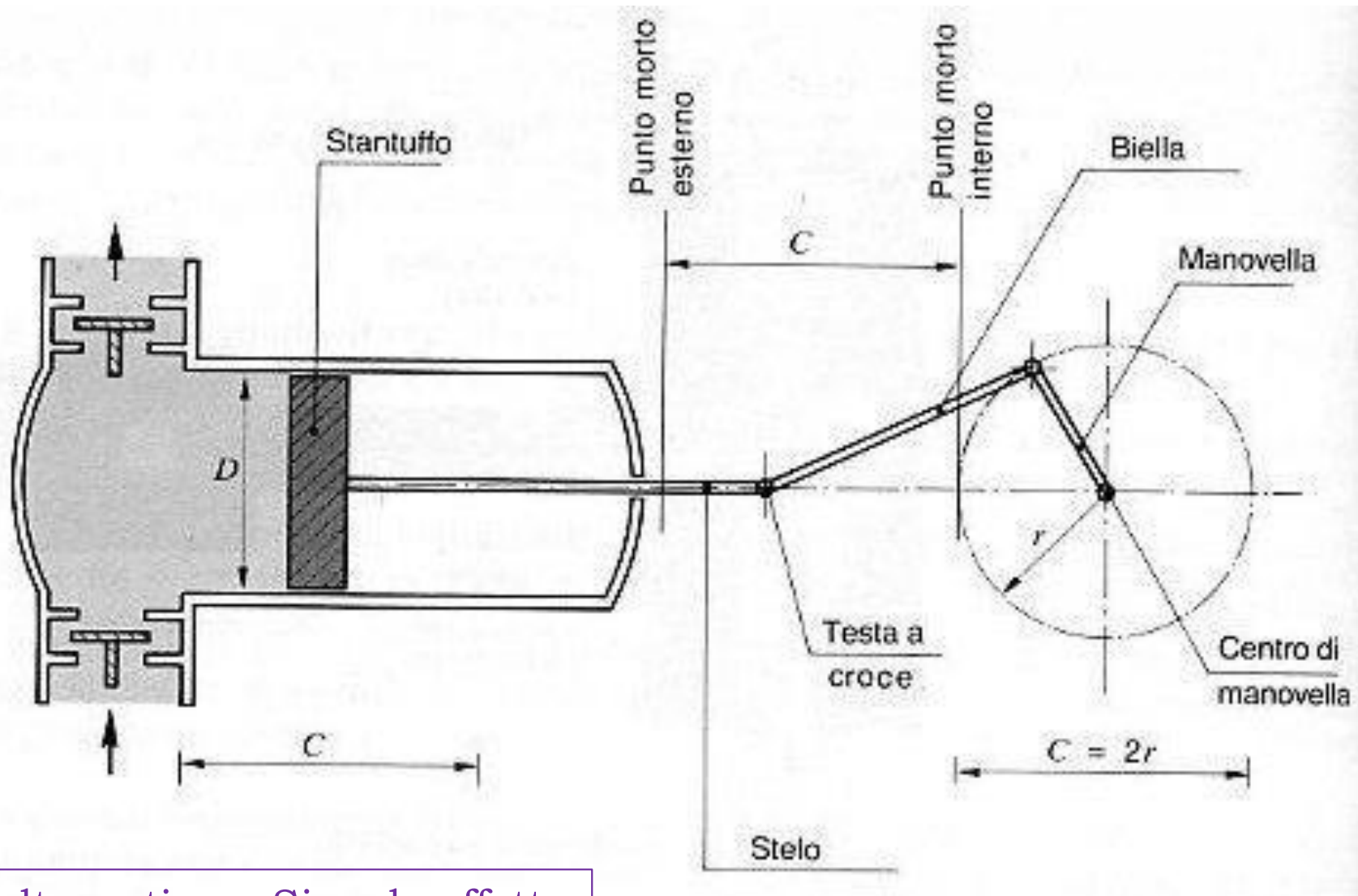
Agenda

- ▶ Pompe volumetriche alternative: generalità
- ▶ Pompe volumetriche alternative: portata
- ▶ Scambio Energetico nelle pompe volumetriche alternative
 - ▶ Diagramma Indicato con fluido perfetto e effetti inerziali nulli
 - ▶ Lavoro per Unità di Massa
 - ▶ Diagramma Indicato con fluido perfetto
 - ▶ Diagramma Indicato nel caso reale
- ▶ Rendimento nelle pompe volumetriche alternative
- ▶ Campi di impiego e condizioni di esercizio



Pompe volumetriche alternative: Generalità

Pompe alternative: generalità

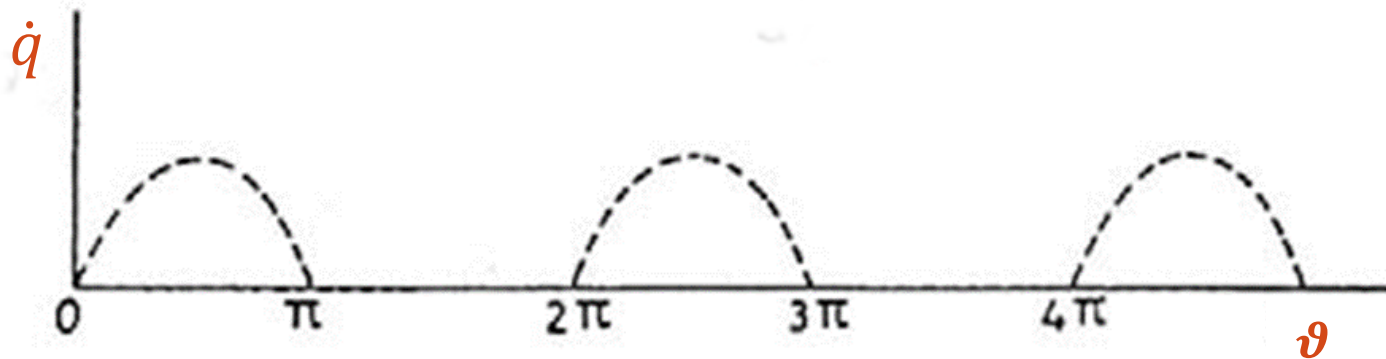


Pompa alternativa a Singolo effetto



Pompe volumetriche alternative: Portata

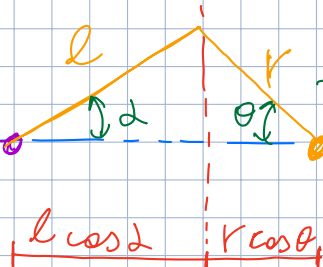
Pompe alternative a singolo effetto: portata



$$q_v = A_P \dot{x}_P$$

COME SI PUO' ESPRIMERE $\dot{x}_p$?

$$q_v = A_p \cdot \dot{x}_p$$



$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

$$n = \frac{60f}{P}$$

$$f = f_{\text{mag}} = 50 \text{ Hz}$$

$$p = \text{COPPIE POLARI}$$

$$3000 \text{ rpm} = \frac{60 \cdot 50}{1-p}$$

$$1-p$$

$$= \frac{120 \cdot 50}{2} = 2p$$

no.
di
poli

$$\theta = 0 \rightarrow PMS$$

$$\theta = \omega \cdot t$$

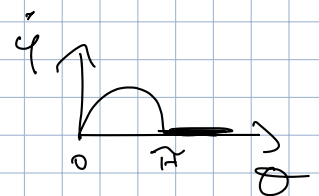
$$l \sin \alpha = r \sin \theta \quad \text{congruenza geometrica}$$

SI SA QUINDI CHE

$$x_p = f(t) = \text{POSIZIONE Istantanea}$$

$$\dot{x}_p = \frac{dx_p}{dt} = \text{VELOCITA' Istantanea}$$

$$\dot{q}(t) = A_p \cdot \dot{x}_p = \text{PORTATA Istantanea}$$



DOBBIAMO TROVARE L'EQ. DI x_p per poi
TROVARE $\dot{x}_p$

$$\begin{cases} x_p(t) = (S + l + r) - (S + l \cos \alpha + r \cos \theta) \\ l \sin \alpha = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_p(t) = l(1 - \cos \alpha) + r(1 - \cos \theta) \\ l \sin \alpha = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_p(t) = l(1 - \cos \alpha) + r(1 - \cos \theta) \\ \sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{r}{l} = \text{RAPPORTO CARTESIANO DEL MANOVELLISMO} \\ \approx 0,22 - 0,30$$

ESPRIMO α in funzione di θ perché $\theta = \omega t$
dove $\omega = \dot{\theta}(t)$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta}$$

POSTO $t = -\left(\frac{r \sin \theta}{l}\right)^2$ si ottiene sviluppando
in serie

$$\sqrt{1+t} \approx 1 + \frac{t}{2} + O(t^2) \Rightarrow t = -\frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta$$

$$\text{quindi } \cos \alpha \approx 1 + \frac{t}{2}$$

$$= 1 - \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \theta$$

$$= \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \theta} \approx 1 - \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \theta$$

ALLORA la POSIZIONE DELLO STANTUFFO

$$\begin{cases} x_p(t) = l(1 - \cos \alpha) + r(1 - \cos \theta) \\ \sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_p(t) = r(1 - \cos \theta) + \cancel{l} \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \theta \right) \\ \sin 2 = \frac{r}{l} \sin \theta \end{cases}$$

$$x_p(t) = r(1 - \cos \theta) + \frac{r^2}{2l} \sin^2 \theta \quad \text{dove } \theta = \omega t$$

→ INFINITESIMO
PERÒ NON POSSO
ELIMINARLO SUBITO

CALCOLO LA VELOCITÀ

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= \frac{dx_p}{dt} = r\omega \sin \theta + \frac{r^2}{2l} \underbrace{2 \sin \theta \cos \theta}_{\sin(2\theta)} \cdot \omega \\ &= r\omega \sin \theta + \frac{r^2 \omega}{2l} (2 \sin \theta \cos \theta) \\ &= r\omega \sin \theta + \frac{r^2 \omega}{2l} \cdot \sin(2\theta) \end{aligned}$$

$$\dot{q}(t) = A_p \left[r\omega \sin \theta + \frac{r^2 \omega}{2l} \cdot \sin(2\theta) \right]$$

lo brello l ; se $l \rightarrow \infty$ allora $\frac{r}{l} = 0$

$x_p(t) = r(1 - \cos \theta)$ è fattibile questo nella realtà?

$$\frac{r}{l} = 0,22 \div 0,30 \rightarrow \frac{l}{r} > 3,5$$

$l > 3,5r$ può essere sufficiente per approssimare la condizione di $l \rightarrow \infty$ e quindi dire $x_p(t) = r(1 - \cos \theta)$

ALLORA

$$\dot{x}_p(t) = r \omega \cdot \sin \theta$$

MA SE VOI $\ddot{x}_p(t) = r \omega^2 \cos \theta$ FATALITÀ

PER $\theta = 0$ $\ddot{x}_p = \text{MAX}$

$\theta = 180^\circ$ $\ddot{x}_p = \text{MIN}$

ABBIAMO RIGIUNTO DELLE EQ. DI POSIZIONE,

VELOCITÀ E ACCELERAZIONE DEL PISTONE

IN FUNZ. r, ω, θ MA SONO ISTANTANEE!

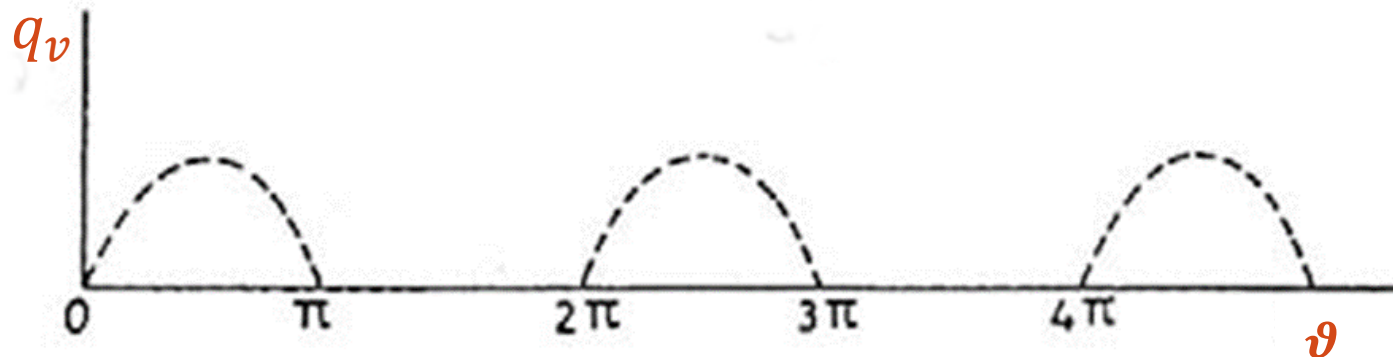
SE VOGLIO LA VEL. MED. DEL PISTONE/STANT

$$\dot{x}_{p, \text{MED}} = \begin{array}{l} 1^\circ \text{ CORSA PMS A PMI} \\ 2^\circ \text{ CORSA PMI A PMS} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{LO FA } n \text{ A SECONDO O MINUTO} \end{array} \right.$$

$$= 2 \cdot \text{CORSA} \cdot n$$

Pompe alternative a singolo effetto: portata

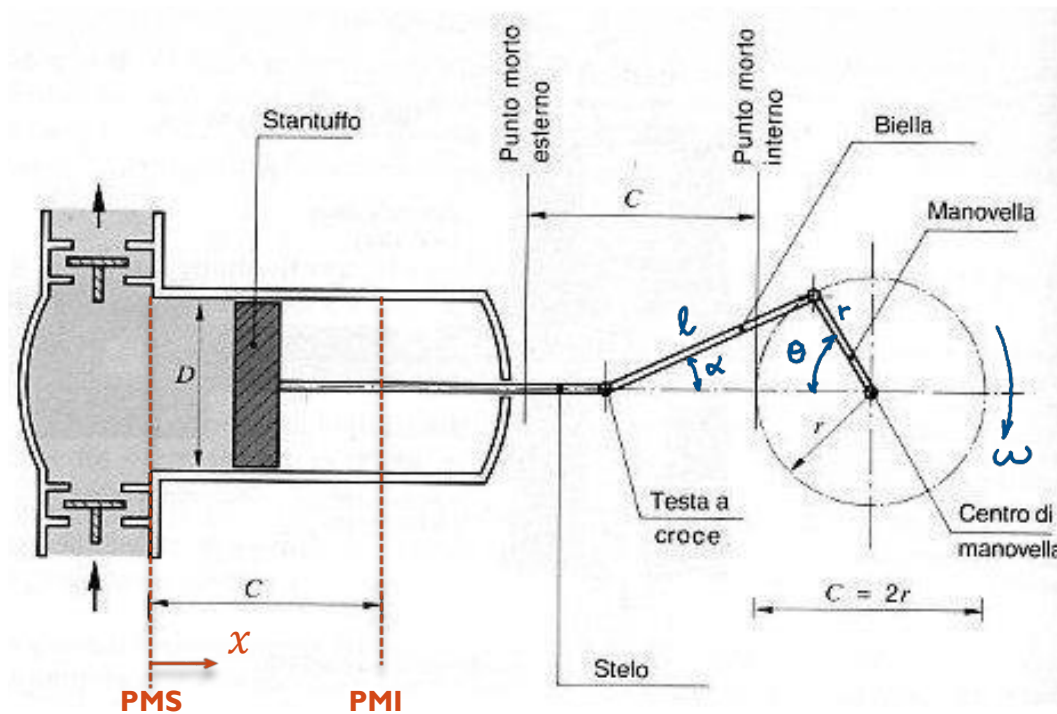


$$q_v = A_P \dot{x}_P = A_P \cdot r\omega \left(\sin \vartheta + \frac{r}{2l} \sin 2\vartheta \right)$$

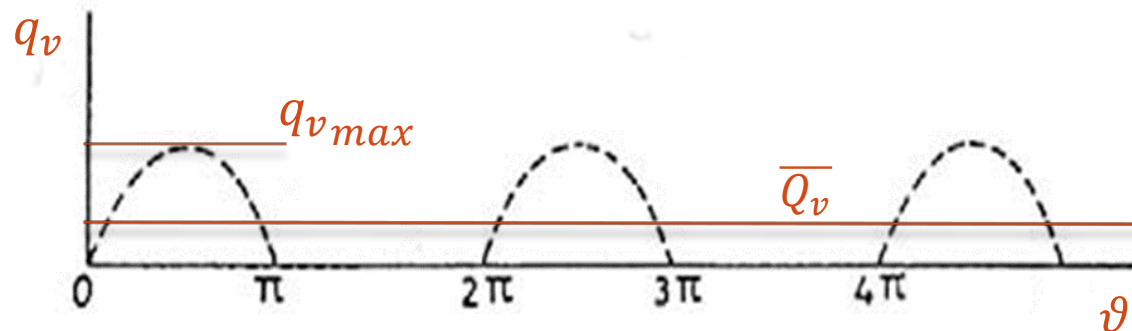
- Si supponga $l/r > 3,5$ così da poter trascurare le armoniche di ordine superiore e ritenere il moto del pistone perfettamente armonico:

$$x_p \approx r(1 - \cos \vartheta) \Rightarrow q_v = A_P \dot{x}_P \approx A_P r\omega \sin \vartheta$$

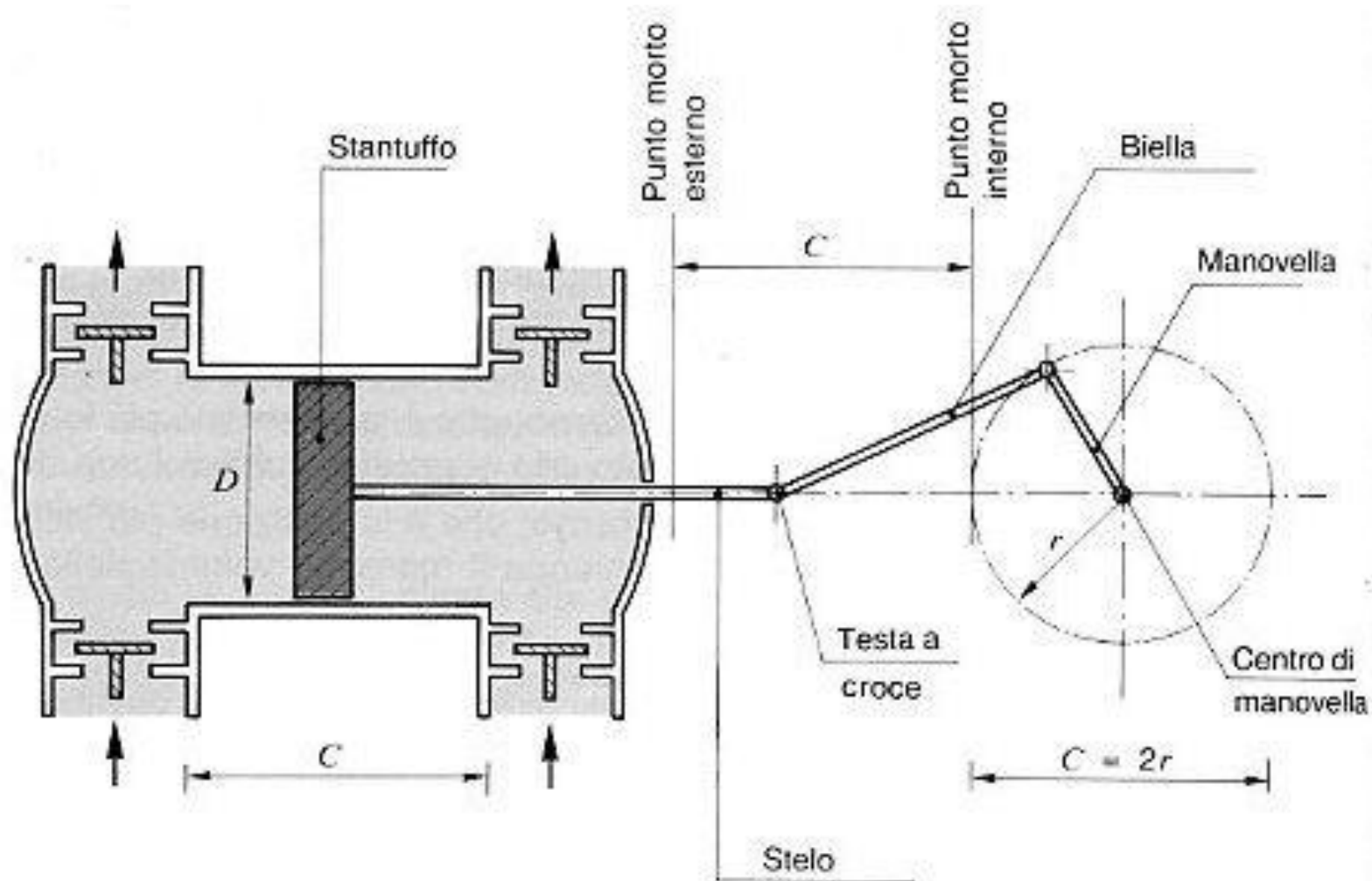
Pompe alternative a singolo effetto: **portata**



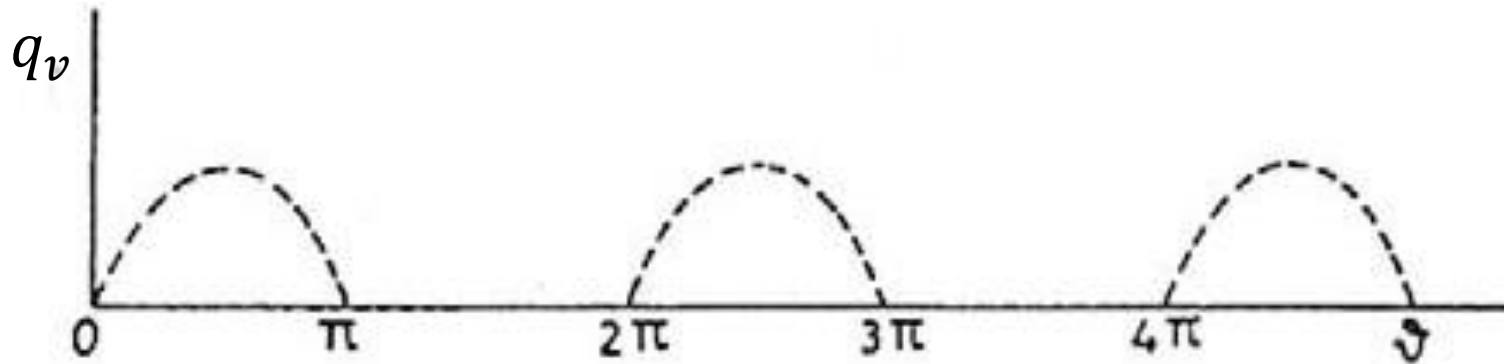
$$\overline{Q_v} = \int_0^{2\pi} A_P r \omega \sin \vartheta d\vartheta / (2\pi) \approx 0.318 q_{vmax}$$



Pompe alternative a doppio effetto



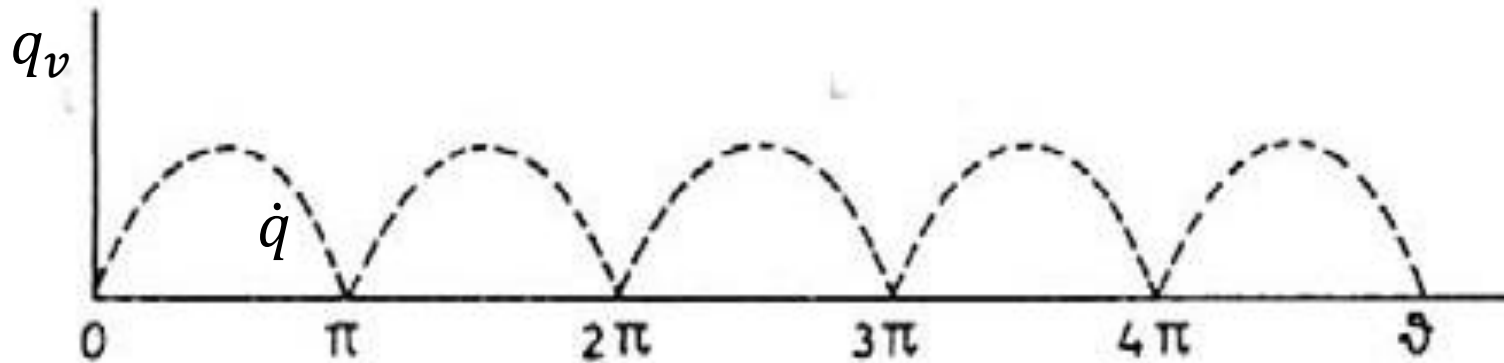
Pompe alternative: andamento della portata a confronto – Singolo vs Doppio Effetto



Singolo effetto



$$\overline{Q_v} \approx \boxed{0.318} q_{v_{max}}$$



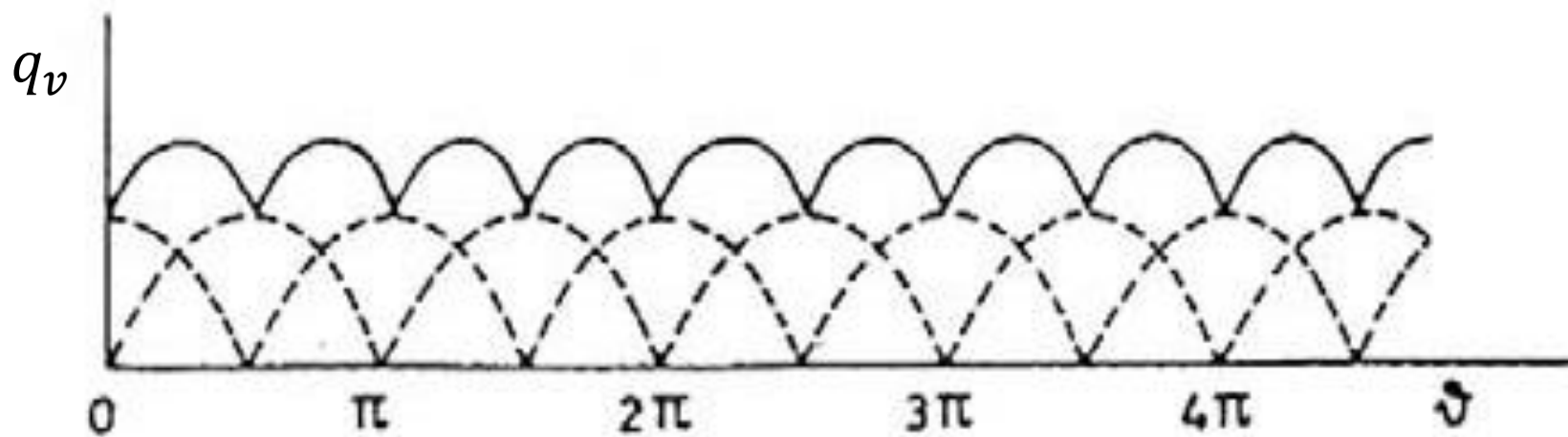
Doppio effetto



$$\overline{Q_v} \approx \boxed{0.535} q_{v_{max}}$$

Pompe alternative: andamento della portata a confronto

Pompa alternativa a due cilindri a doppio effetto sfasati di 90°



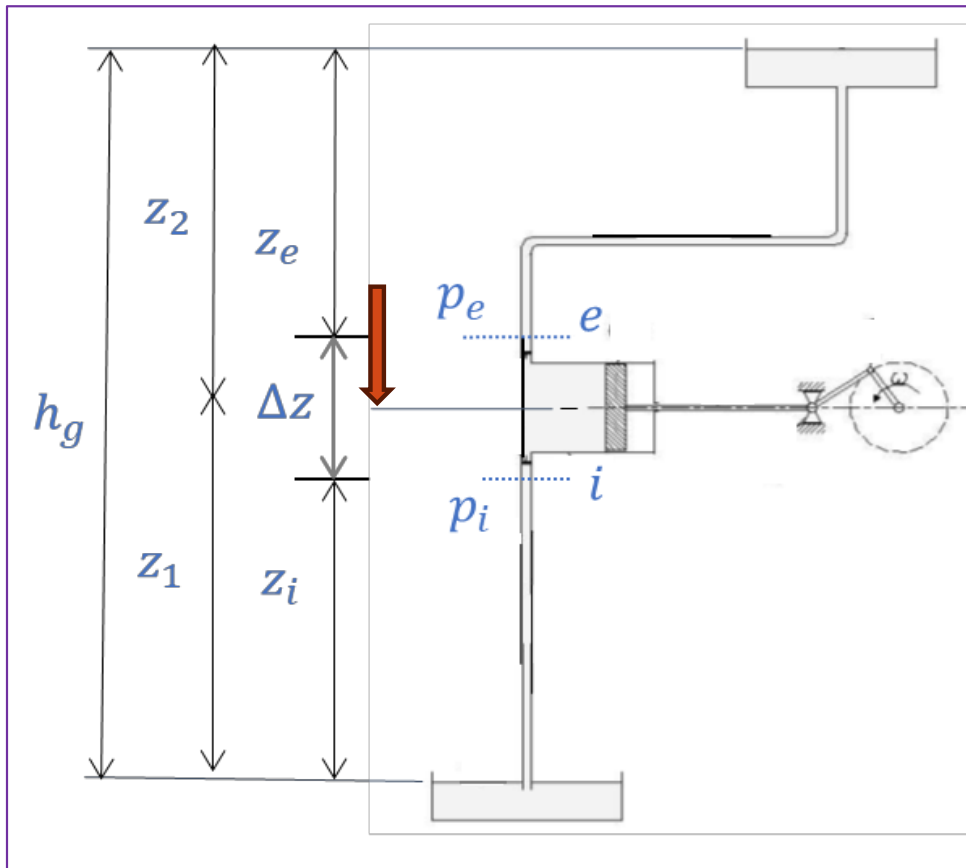
$$q_v = \overline{Q_v} \approx 0.77 q_{v_{max}}$$

Pompe volumetriche alternative: Scambio energetico

Diagramma indicato IDEALE, Diagramma indicato INERZIALE,
Diagramma indicato

Pompe alternative a singolo effetto: **scambio energetico**

Pompa alternativa a Singolo effetto



- Il **carattere pulsante** del moto del liquido all'interno di un impianto, ad esempio di sollevamento, **influenza sensibilmente** l'andamento delle **pressioni** all'interno della pompa
- Tale andamento deve essere determinato al fine di garantire **adequate prestazioni** della pompa e per motivazioni **strutturali**

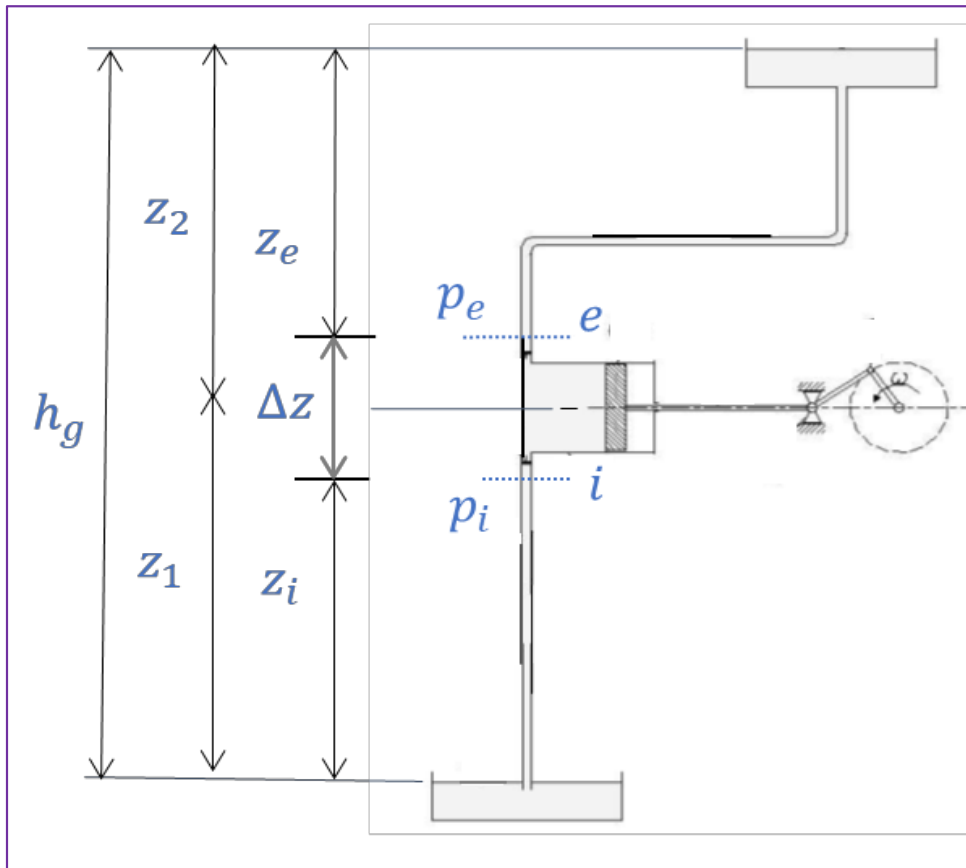


DIAGRAMMA INDICATO

- Nel **DIAGRAMMA INDICATO** le pressioni all'interno della pompa sono riferite **all'asse del cilindro**

Pompe alternative a singolo effetto: **scambio energetico**

Pompa alternativa a Singolo effetto

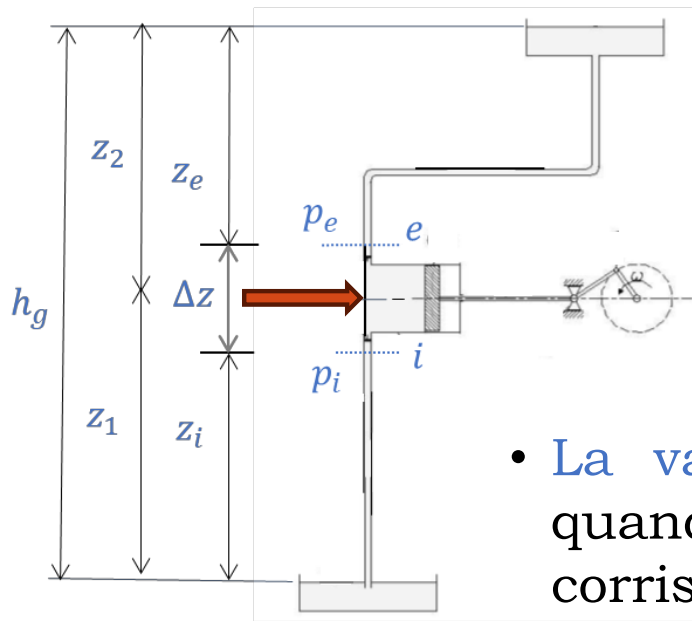


- Il **DIAGRAMMA INDICATO** si riferisce alle **condizioni REALI** e non alle situazioni intermedie che prevedono IPOTESI SEMPLIFICATIVE!!!
- Per correlare gli effetti alle cause che li producono si ignorino inizialmente gli **effetti inerziali** legati al carattere **non stazionario** del moto all'interno delle condotte e si suppone inoltre il **fluido perfetto**
 - ✓ **Diagramma indicato IDEALE**: fluido perfetto ed effetti inerziali nulli
 - ✓ **Diagramma indicato INERZIALE**: fluido perfetto
 - ✓ **Diagramma indicato**: nessuna ipotesi semplificativa!

Pompe volumetriche alternative: Scambio energetico

Diagramma indicato «IDEALE»

Diagramma indicato «IDEALE» – Ipotesi: fluido perfetto e effetti inerziali nulli



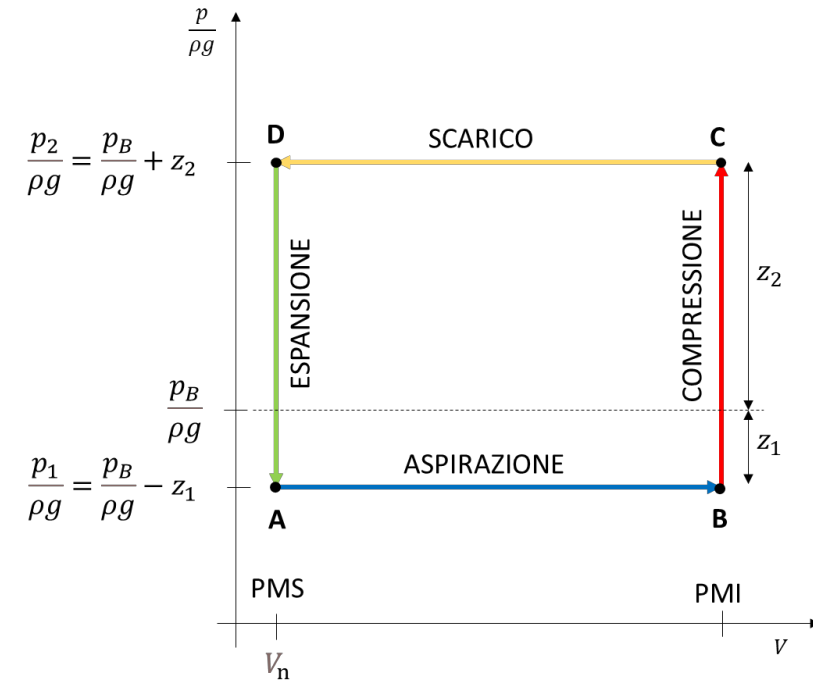
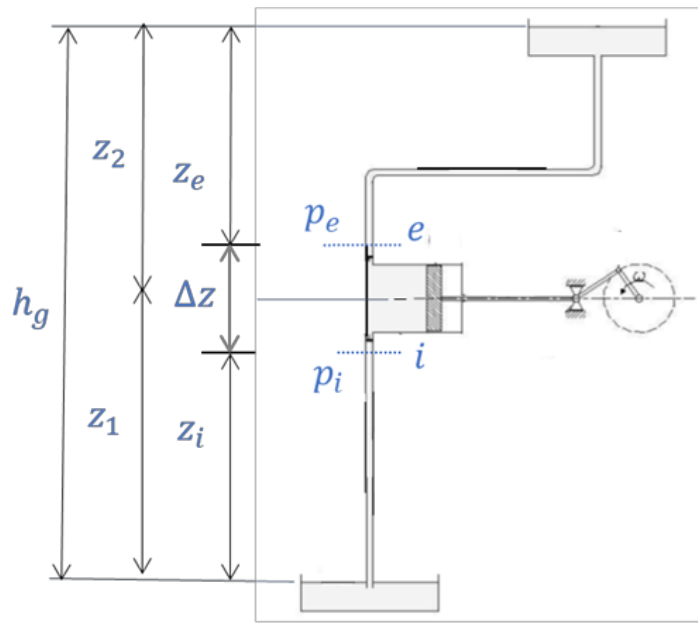
- Nel **diagramma indicato IDEALE** le pressioni all'interno della pompa sono riferite **all'asse del cilindro**
- Il ciclo di funzionamento di una pompa alternativa ha inizio all'apertura della valvola di aspirazione
- La **valvola di aspirazione si apre** spontaneamente quando la pressione interna del cilindro in corrispondenza della valvola eguaglia la pressione p_i esercitata dal fluido che dipende dall'impianto:

$$\frac{p_i}{\rho g} = \frac{p_B}{\rho g} - z_i$$

- All'apertura della valvola la **pressione p_1** in corrispondenza dell'**asse del cilindro** ha il valore:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_i}{\rho g} - \frac{\Delta z}{2}$$

Diagramma indicato «IDEALE» – Ipotesi: fluido perfetto e effetti inerziali nulli

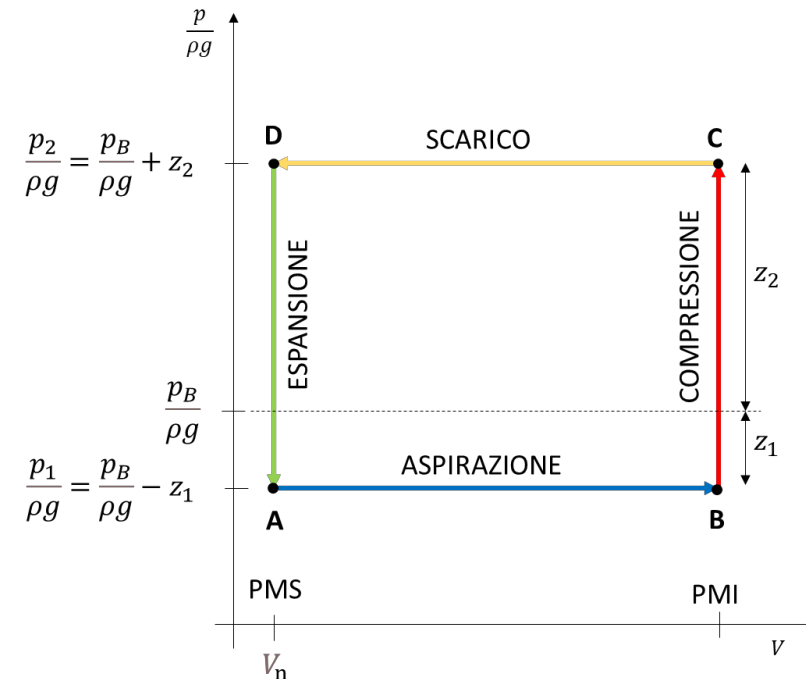
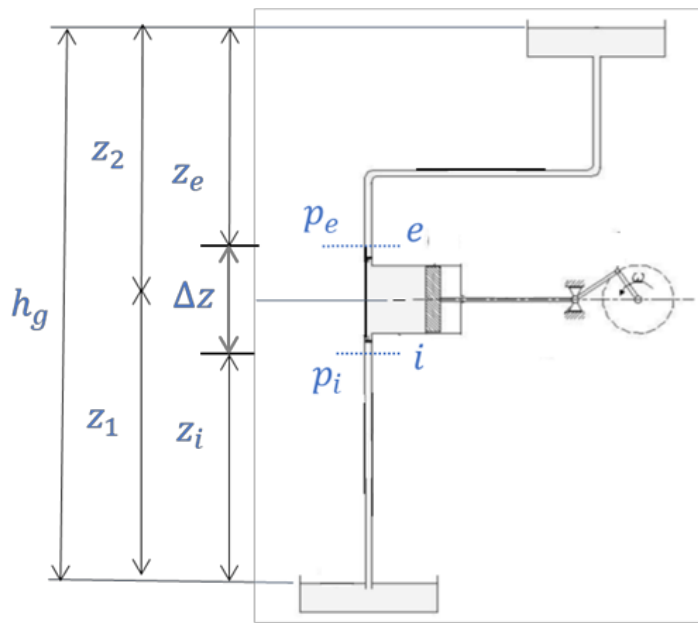


- Il momento di apertura della valvola corrisponde con l'inizio della fase di aspirazione, quando il pistone si trova al punto morto superiore (PMS) ed è ancora $Q_v = 0$:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_i}{\rho g} - \frac{\Delta z}{2} = \frac{p_B}{\rho g} - z_i - \frac{\Delta z}{2} = \frac{p_B}{\rho g} - z_1$$

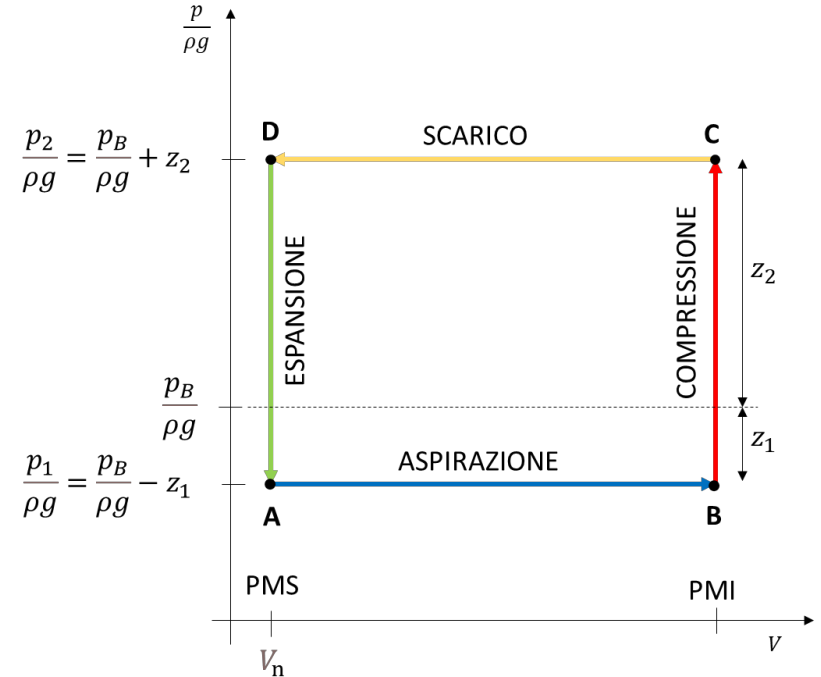
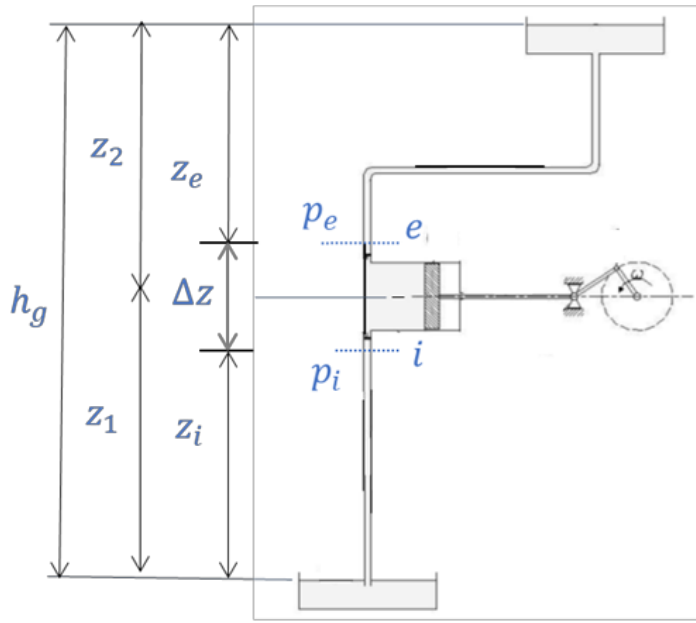
Nelle ipotesi fatte la pressione si mantiene costante per tutta la corsa di aspirazione (tratto A-B)

Diagramma indicato «IDEALE» – Ipotesi: fluido perfetto e effetti inerziali nulli



- Raggiunto il punto morto inferiore (**PMI**), non appena il pistone tende a invertire il moto verso il **PMS**, la **pressione** del fluido **aumenta istantaneamente** (a volume costante, fluido incompressibile) chiudendo la valvola di aspirazione

Diagramma indicato «IDEALE» – Ipotesi:
fluido perfetto e effetti inerziali nulli

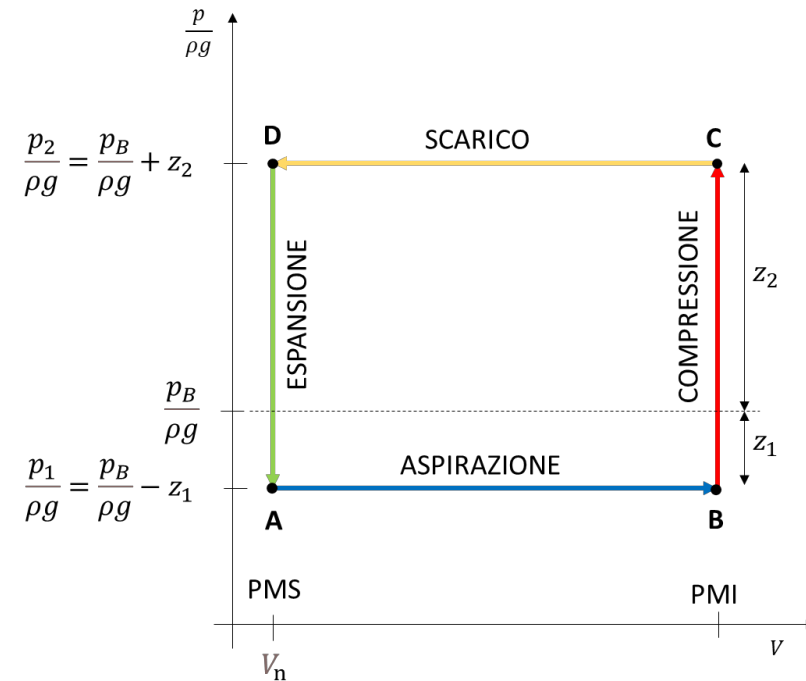
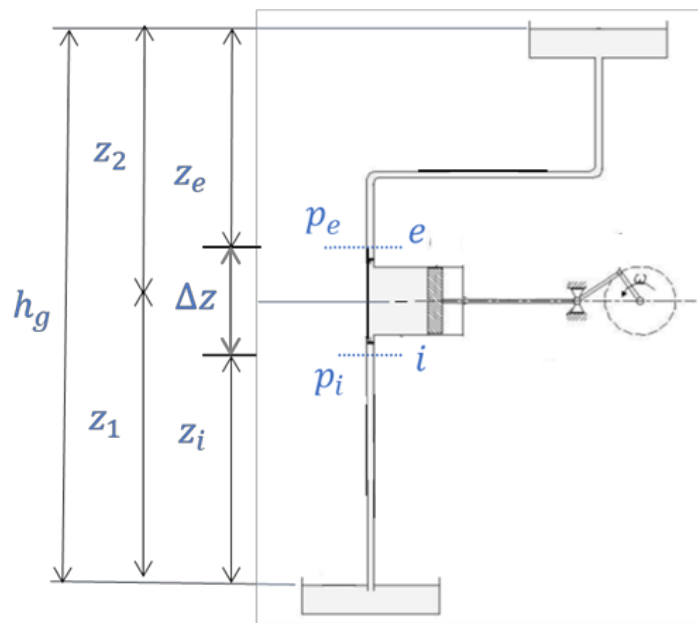


- Sempre **istantaneamente**, con il pistone ancora al **PMI**, la pressione all'**interno** del cilindro raggiunge il valore p_2 che porta all'apertura della valvola di scarico (**tratto B-C**):

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_e}{\rho g} + \frac{\Delta z}{2} = \frac{p_B}{\rho g} + z_e + \frac{\Delta z}{2} = \frac{p_B}{\rho g} + z_2$$

Nelle ipotesi fatte la pressione si mantiene costante per tutta la corsa di scarico (**tratto C-D**)

Diagramma indicato «IDEALE» – Ipotesi: fluido perfetto e effetti inerziali nulli



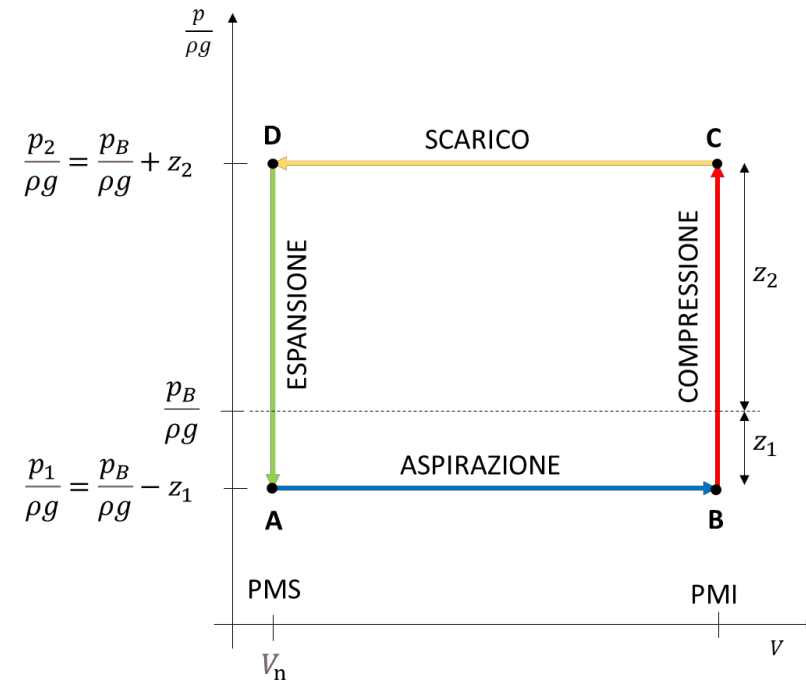
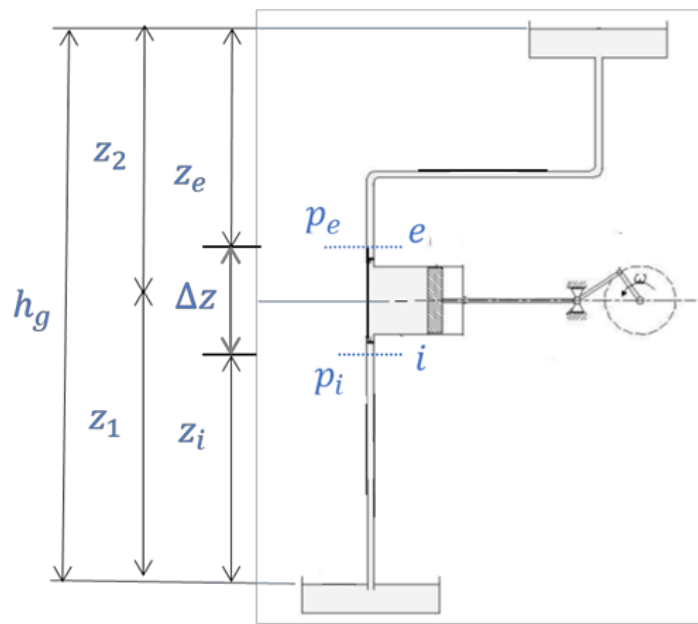
- Raggiunto il PMS, il pistone inverte la direzione del moto e la **pressione** nel cilindro **cala** istantaneamente (a volume costante) fino al valore:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_i}{\rho g} - \frac{\Delta z}{2}$$

consentendo un nuovo riempimento del cilindro e la ripetizione del ciclo (tratto D-A)



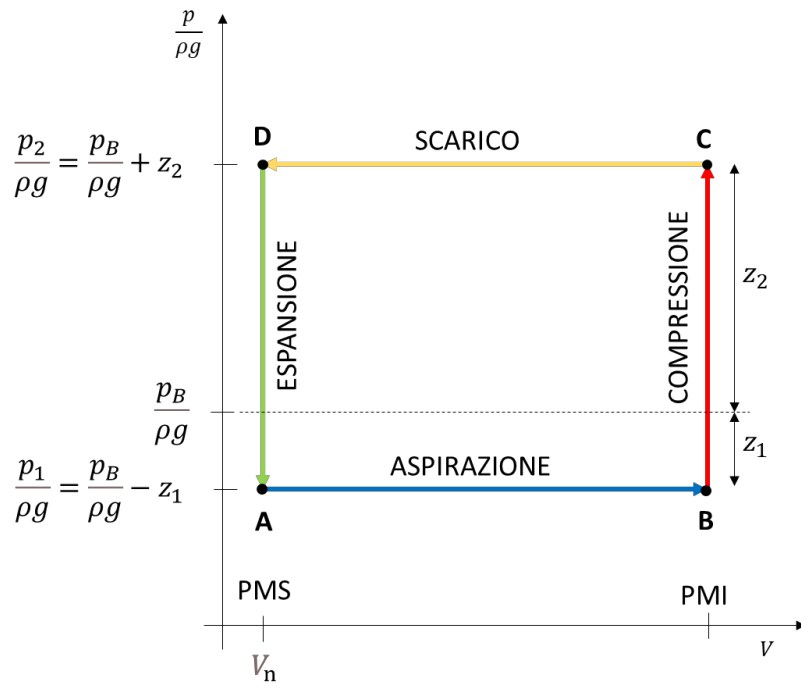
Diagramma indicato «IDEALE» – Ipotesi: fluido perfetto e effetti inerziali nulli



- Noti gli andamenti della pressione all'interno del cilindro è possibile determinare il **lavoro richiesto alla pompa** per completare il ciclo di funzionamento descritto
- NOTA: Questo è il DIAGRAMMA INDICATO «IDEALE»

Diagramma indicato «IDEALE» – Lavoro ideale per unità di massa

- Nelle ipotesi di ciclo «ideale», il lavoro ideale richiesto dalla pompa coincide con l'energia fornita al fluido, data dalla differenza tra l'energia del fluido tra la sezione d'uscita e e la sezione di ingresso i della pompa:



$$gh = \frac{p_e^0}{\rho} - \frac{p_i^0}{\rho}$$

$$gh = \left[\frac{p_e}{\rho} + g(z_i + \Delta z) + \frac{C_e^2}{2} \right] - \left(\frac{p_i}{\rho} + gz_i + \frac{C_i^2}{2} \right)$$

- Assumendo trascurabile la variazione di energia cinetica:

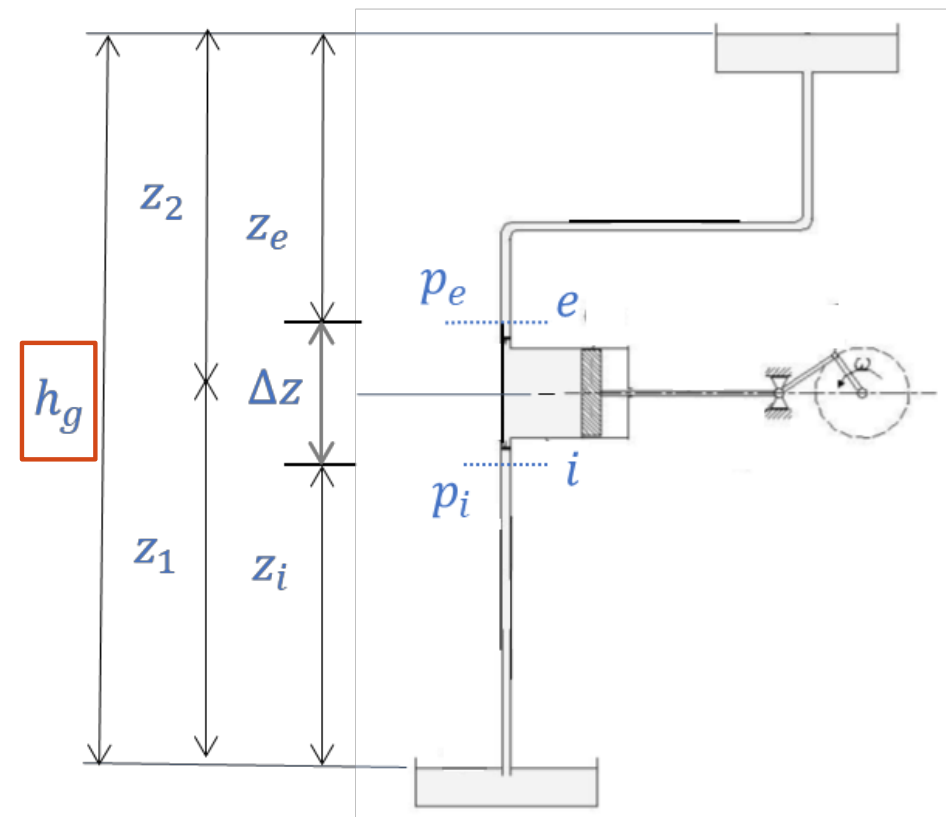
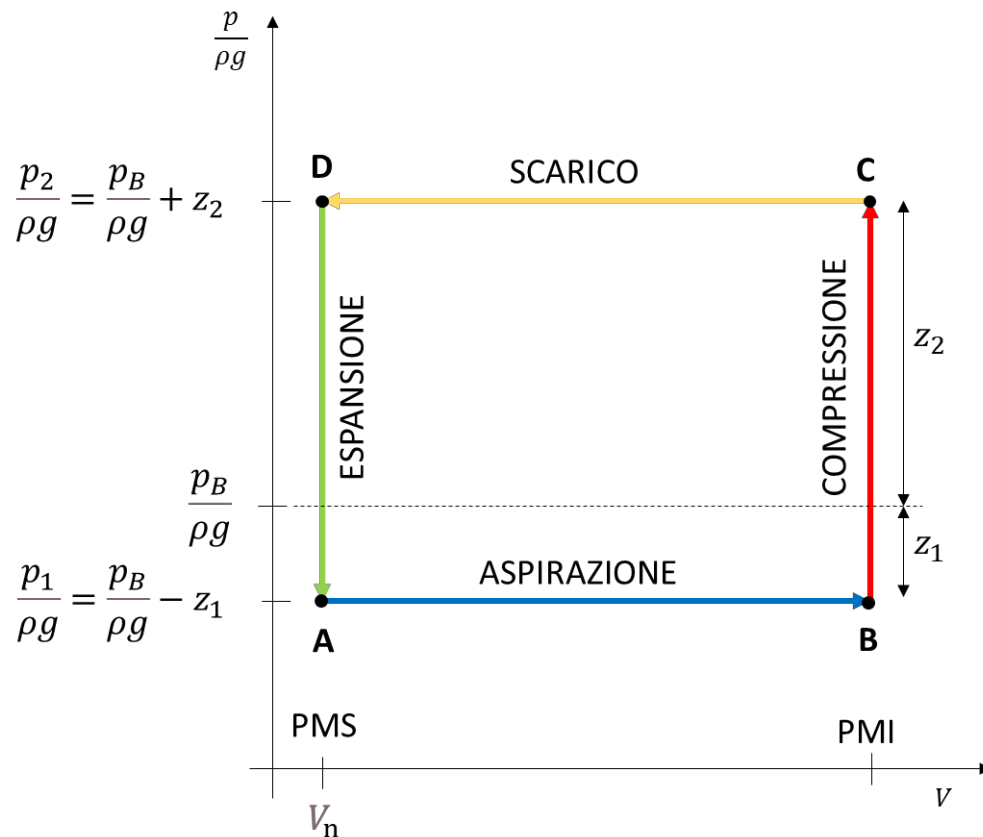
$$gh = \left[\left(\frac{p_B}{\rho} + g z_e \right) + g(z_i + \Delta z) \right] - \left[\left(\frac{p_B}{\rho} - g z_i \right) + g z_i \right]$$

- Assumendo trascurabile la variazione di quota:

Diagramma indicato «IDEALE» – Lavoro ideale per unità di massa

$$gh = \left[\left(\cancel{\frac{p_B}{\rho}} + g z_e \right) + g (z_i + \Delta z) \right] - \left[\left(\cancel{\frac{p_B}{\rho}} - \cancel{g z_i} \right) + \cancel{g z_i} \right] = g(z_e + z_i + \Delta z)$$

$$= g(z_1 + z_2) = g h_g \Rightarrow \boxed{g h = g h_g}$$



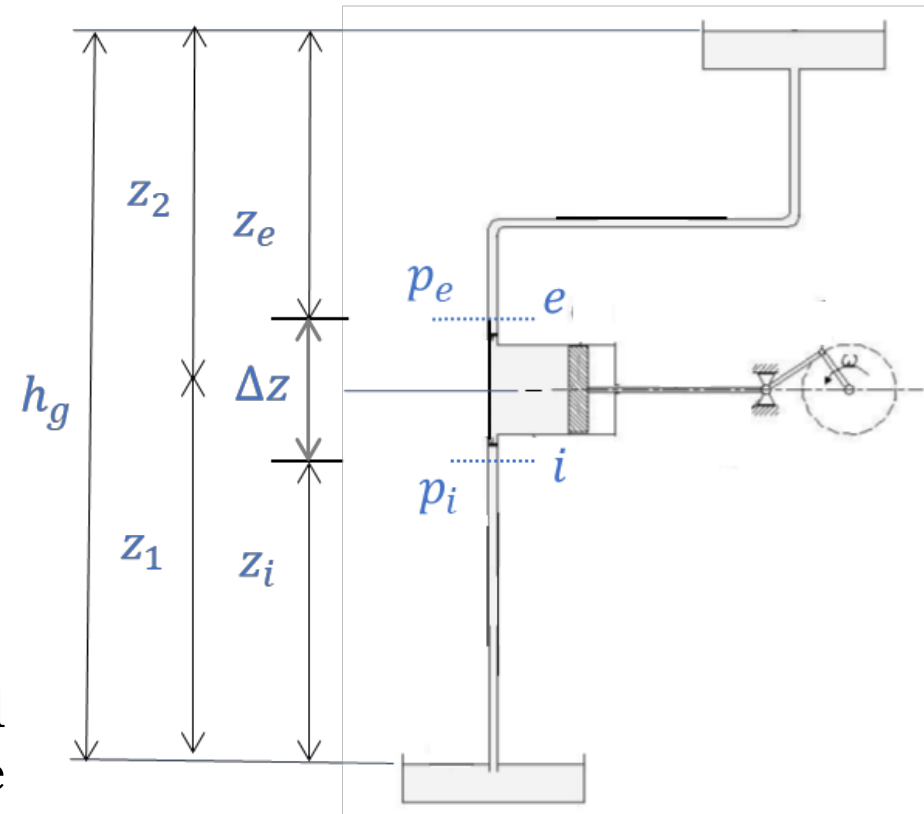
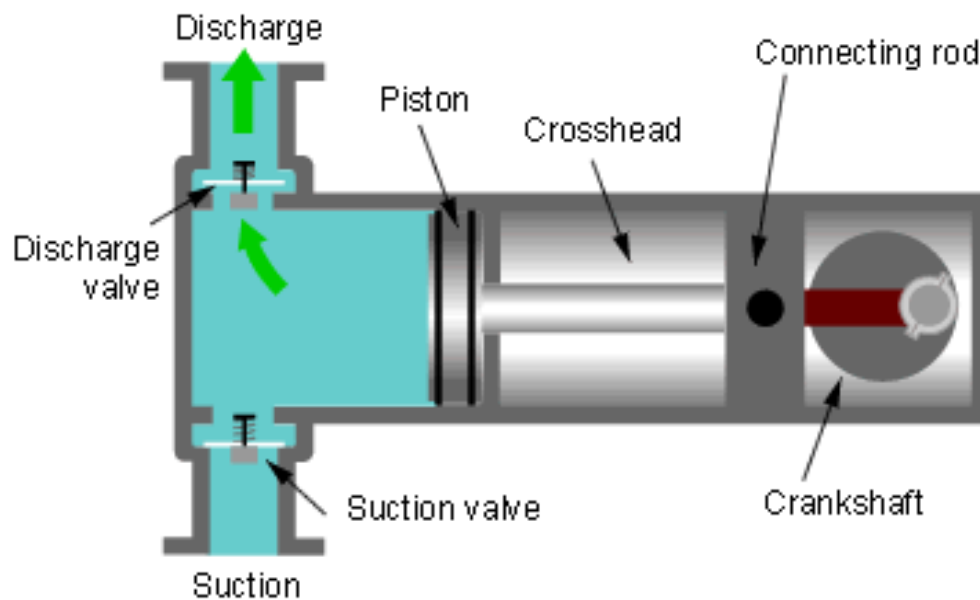


Pompe volumetriche alternative: Scambio energetico

Diagramma indicato «INERZIALE»

Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto

- Si considerino adesso gli **effetti inerziali** ma il fluido rimane perfetto!!!!



- L'azione combinata del moto del pistone e dell'apertura/chiusura delle valvole **costringe** il **fluido** nelle condotte ad alterare il suo **stato** di moto/quiete

Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto

INIZIO ASPIRAZIONE

- Si apre la valvola ed il pistone comincia la corsa di aspirazione
- L'ingresso del fluido all'interno del cilindro è ottenuto creando un differenza di **pressione**:

$$p_{cil} < p_{condotta}$$

- Tale differenza di pressione comporta infatti l'apertura pressochè istantanea della valvola di aspirazione
- Se non ci fossero gli effetti inerziali, basterebbe questa **minima differenza** di pressione per ottenere la messa in moto di **TUTTA la massa fluida** contenuta nella condotta

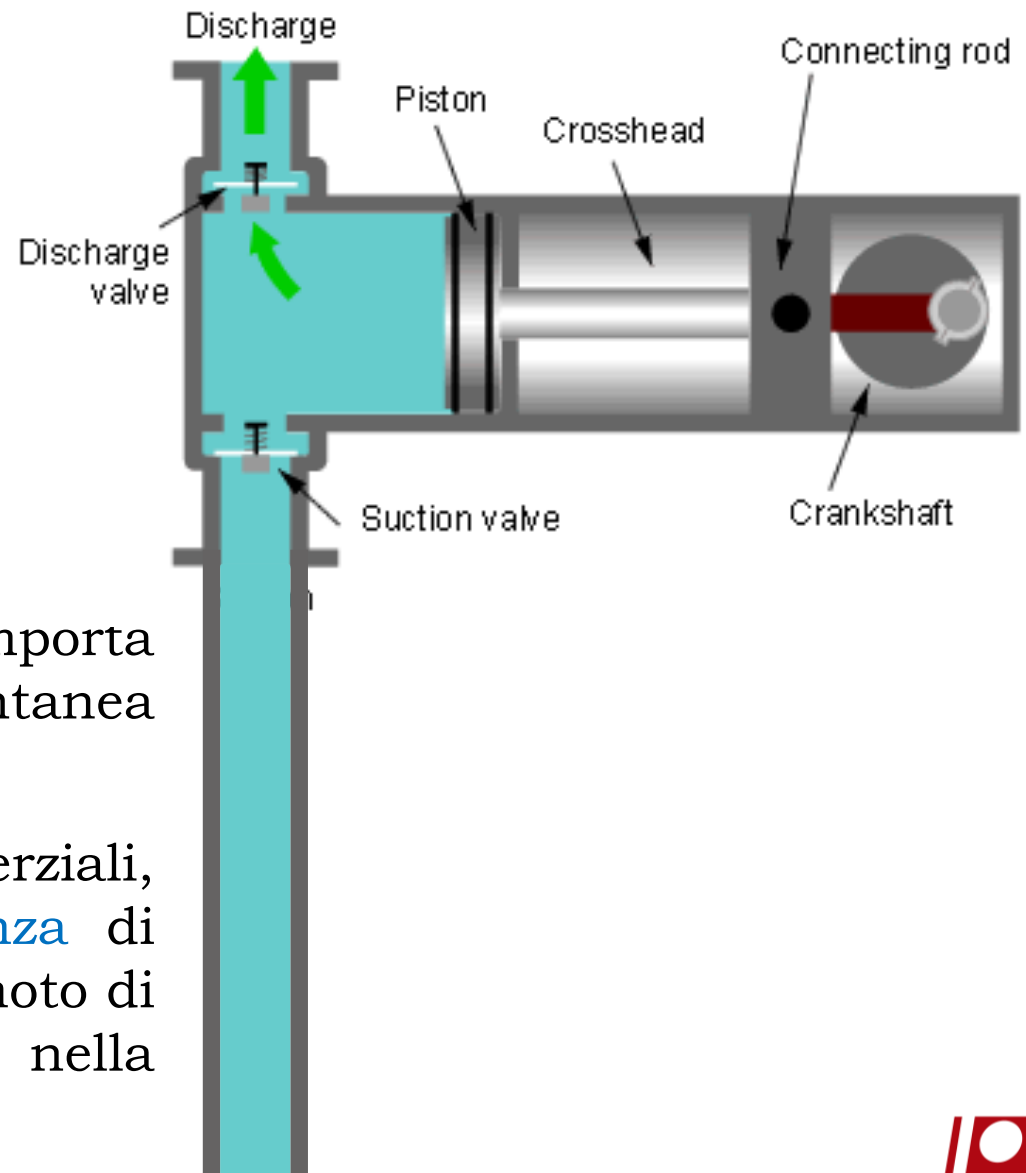


Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto

ASPIRAZIONE

- La massa fluida nella condotta si trova però in uno stato di **quiete**
- La sua inerzia la porta ad **opporsi** al **moto** indotto dal **pistone**
- Questa forza di inerzia si quantifica tramite la legge di **Newton**:

$$F_{i_{in}} = m_c a_{c_i}$$

- Per vincere questa forza il pistone dovrà creare una **depressione** all'interno del cilindro tale da generare una forza di pressione **uguale** a quella di **inerzia**

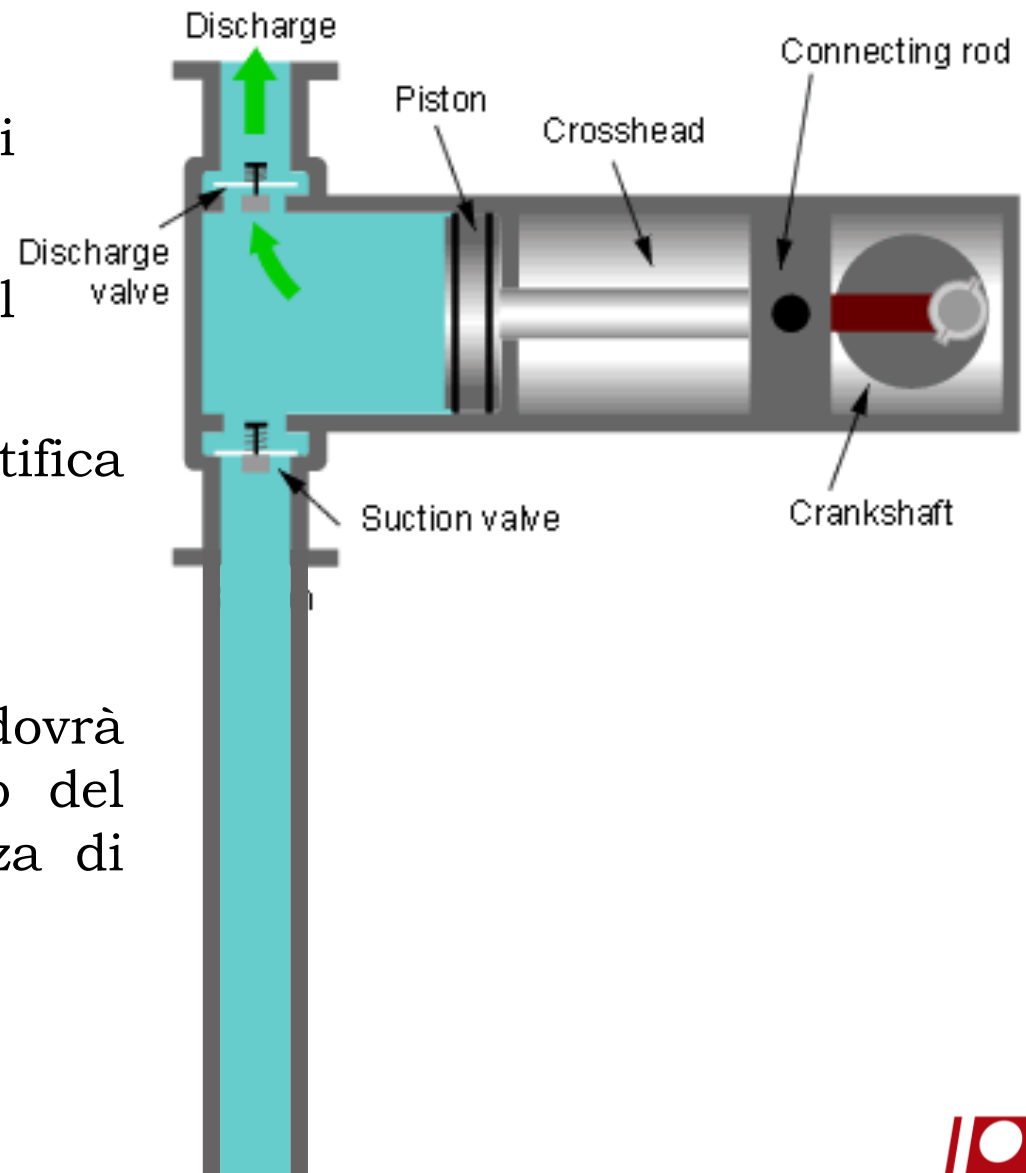


Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto

FINE ASPIRAZIONE

- Nella fase finale dell'aspirazione, il **pistone** comincia a rallentare
- In **assenza di effetti inerziali**, la massa fluida nella condotta **rallenterebbe** istante per **istante**, **adeguandosi** alla variazione di velocità del pistone
- In realtà tale massa ha un'inerzia di movimento che si **oppone** al rallentamento e che la porta a cercare di mantenere la stessa velocità
- Tale forza genera un'azione di **pressione** sul pistone e sul fluido all'interno del cilindro

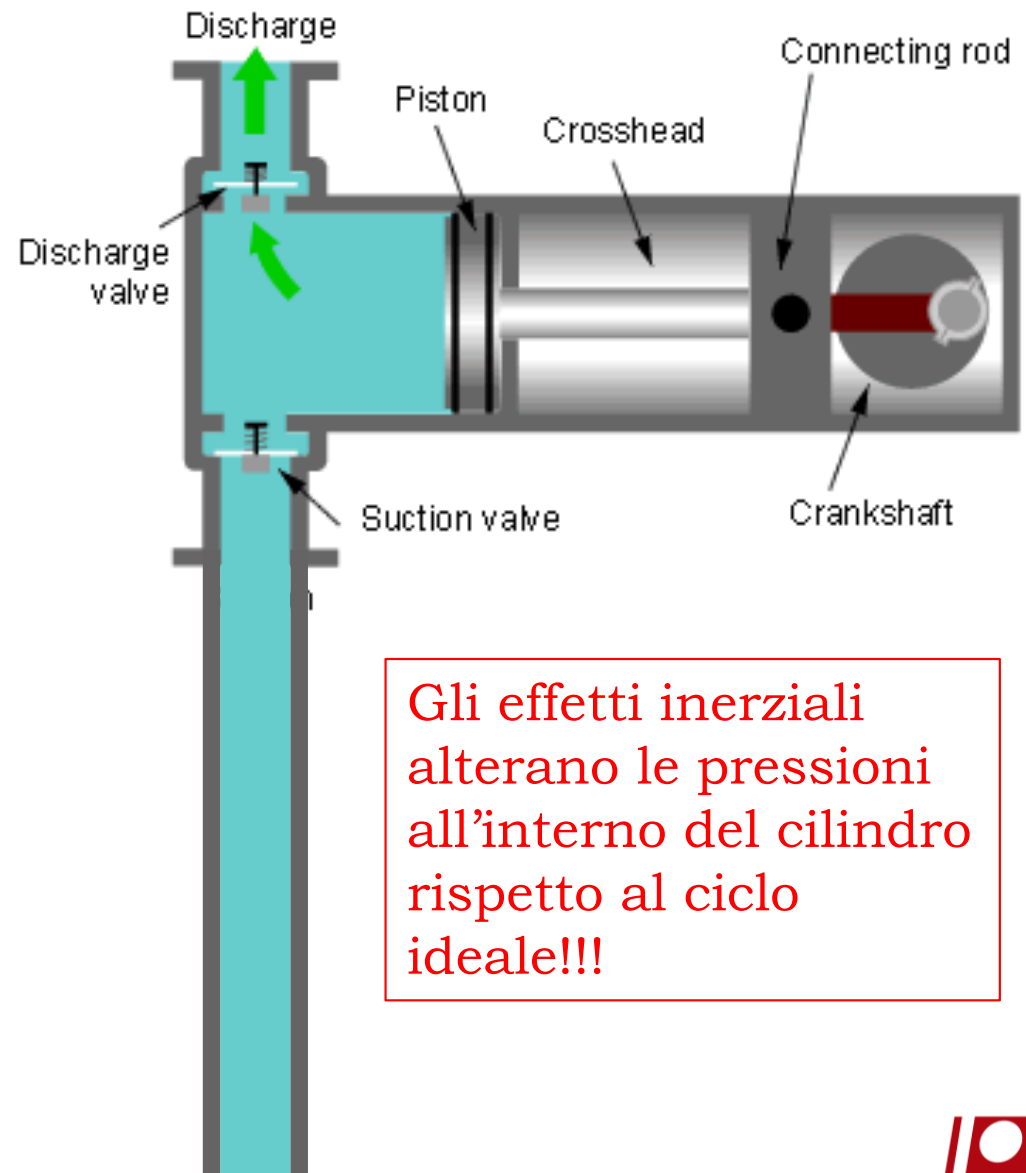
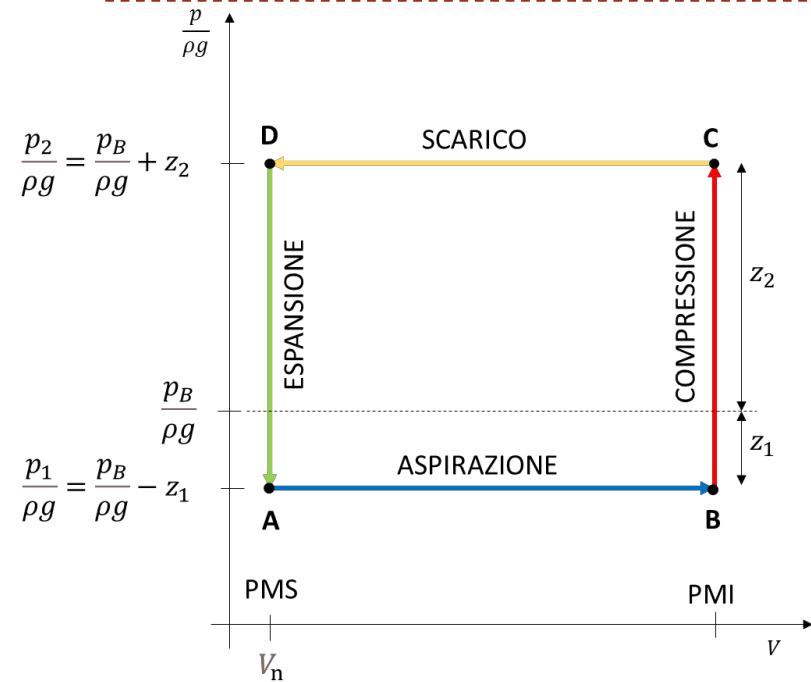


Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto



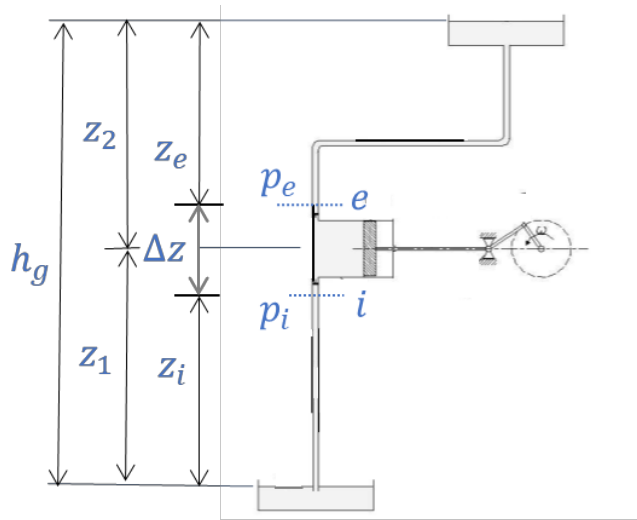
- Nel valutare il diagramma, si devono quindi considerare gli **effetti inerziali** dovuti al carattere non stazionario del campo di moto
- All'inizio della fase di aspirazione, la **massa** m_c di **liquido** presente nella **condotta di aspirazione**, di sezione A_{ci} e di lunghezza l_{ci} , è soggetta a un'accelerazione a_{ci} e quindi a una forza d'inerzia $F_{i_{in}}$ pari a:

$$F_{i_{in}} = m_c a_{ci} = (\rho A_{ci} l_{ci}) a_{ci}$$

- L'accelerazione a_{ci} può essere determinata sfruttando l'**equazione di continuità** e l'**incomprimibilità** del fluido:

$$\underbrace{A_{ci} \dot{x}_{ci}}_{Q_{v, condotta}} = \underbrace{A_p \dot{x}_p}_{Q_{v, cilindro}} \rightarrow \dot{x}_{ci} = \dot{x}_p \frac{A_p}{A_{ci}} \rightarrow \ddot{x}_{ci} = \ddot{x}_p \frac{A_p}{A_{ci}}$$

Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto



$$A_{ci} \dot{x}_{ci} = A_p \dot{x}_p \rightarrow \dot{x}_{ci} = \dot{x}_p \frac{A_p}{A_{ci}} \rightarrow \ddot{x}_{ci} = \ddot{x}_p \frac{A_p}{A_{ci}}$$

- Assumendo per semplicità il moto del pistone perfettamente armonico, si ottiene:

$$x_p \approx r[1 - \cos(\omega t)] \rightarrow \dot{x}_p = r \omega \sin(\omega t) \rightarrow a_p = r \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow F_{iin} = m_c a_{ci} = (\rho A_{ci} l_{ci}) \ddot{x}_p \frac{A_p}{A_{ci}}$$

$$= \rho l_{ci} r \omega^2 \cos(\omega t) A_p$$

- Dal momento che la pressione che determina l'ingresso del fluido è quella in corrispondenza della valvola stessa, il **contributo in pressione** delle forze inerziali, si ottiene dividendo F_{iin} per la sezione della condotta A_{ci} , ottenendo:

$$\Delta p_{1in} = \rho l_{ci} r \omega^2 \frac{A_p}{A_{ci}} \cos(\omega t)$$

Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto

- La pressione all'interno del cilindro varierà quindi di un contributo **uguale e contrario** a quello derivante dalle forze di inerzia:
- La pressione dell'interno del cilindro durante l'**aspirazione** sarà pari a:

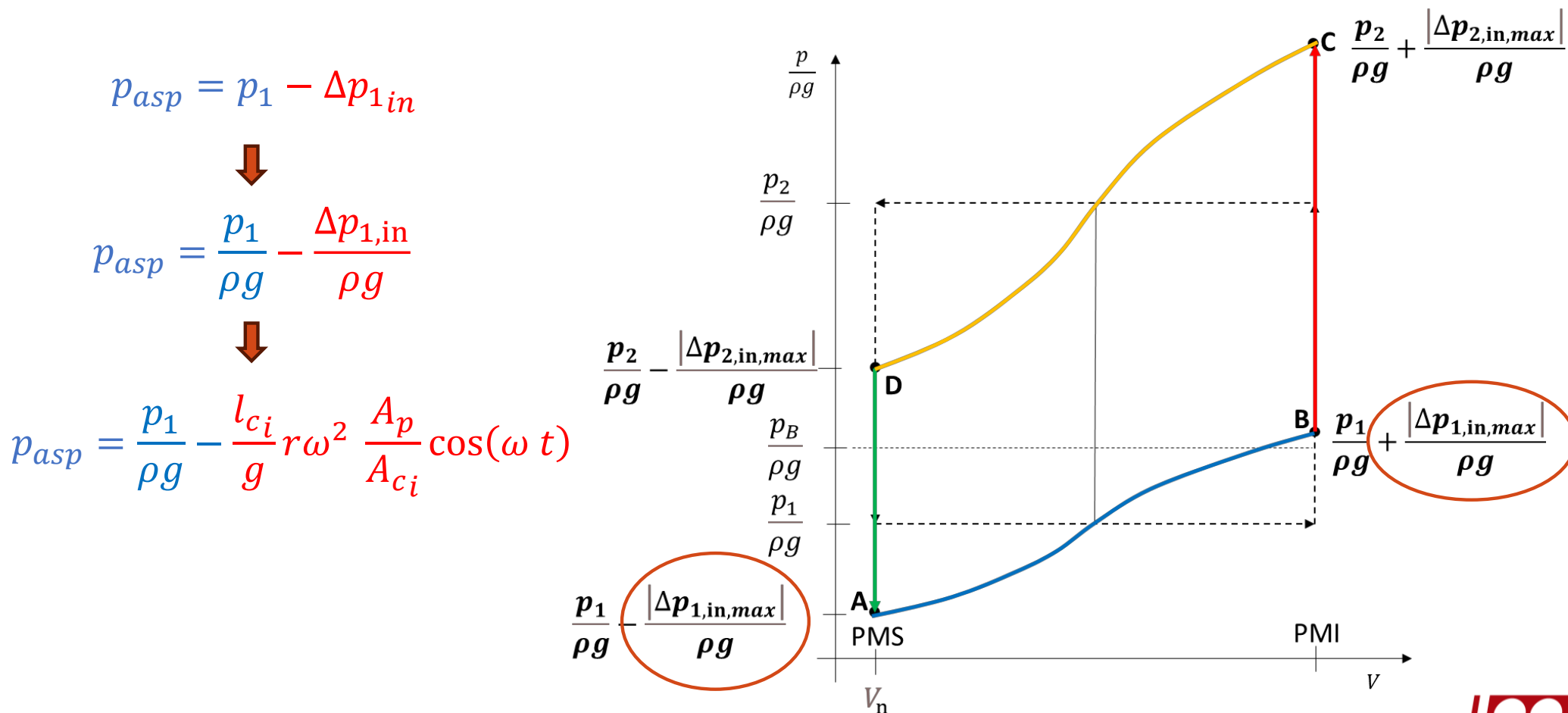


Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto

- Allo **scarico** si ha un analogo contributo di pressione dovuto alle forze inerziali:

$$\Delta p_{2in} = \rho l_{ce} r \omega^2 \frac{A_p}{A_{ce}} \cos(\omega t)$$

- La pressione dell'interno del cilindro sarà quindi pari a:

$$p_{scarico} = p_2 - \Delta p_{2in}$$



$$p_{scarico} = \frac{p_2}{\rho g} - \frac{\Delta p_{2,in}}{\rho g}$$



$$p_{scarico} = \frac{p_2}{\rho g} - \frac{l_{ce}}{g} r \omega^2 \frac{A_p}{A_{ce}} \cos(\omega t)$$

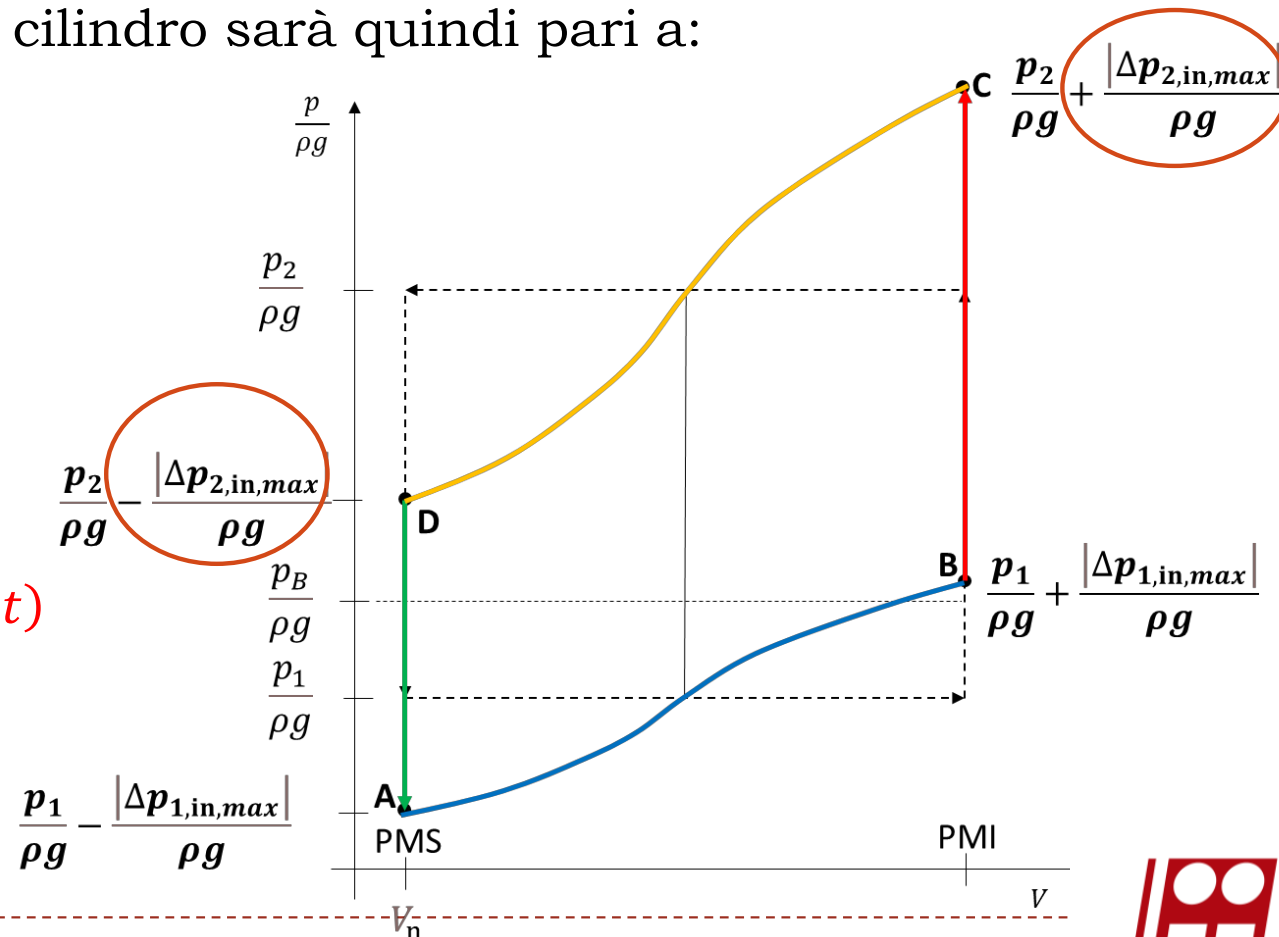


Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto

- Il diagramma indicato «**INERZIALE**» assume quindi la forma:

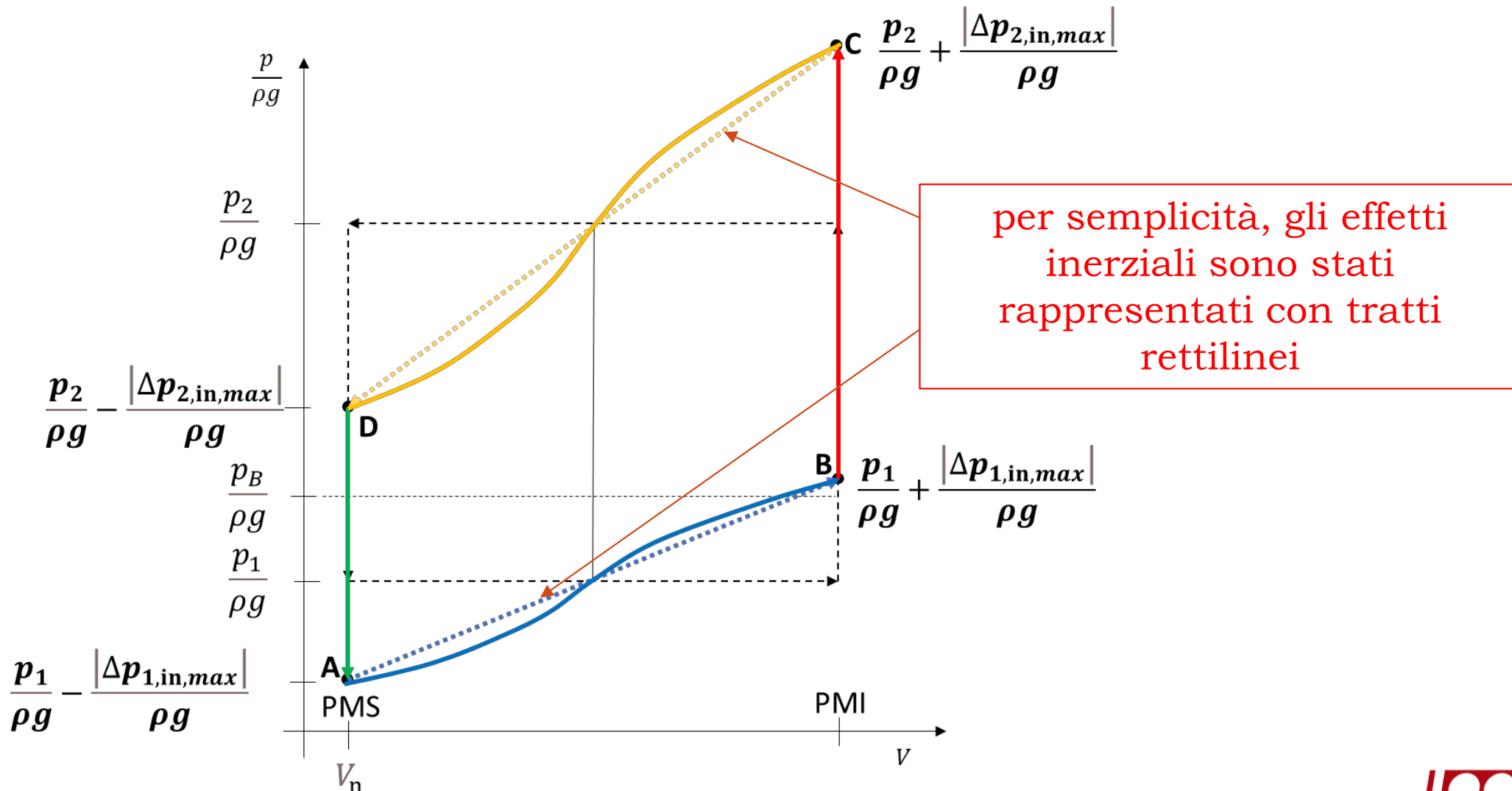
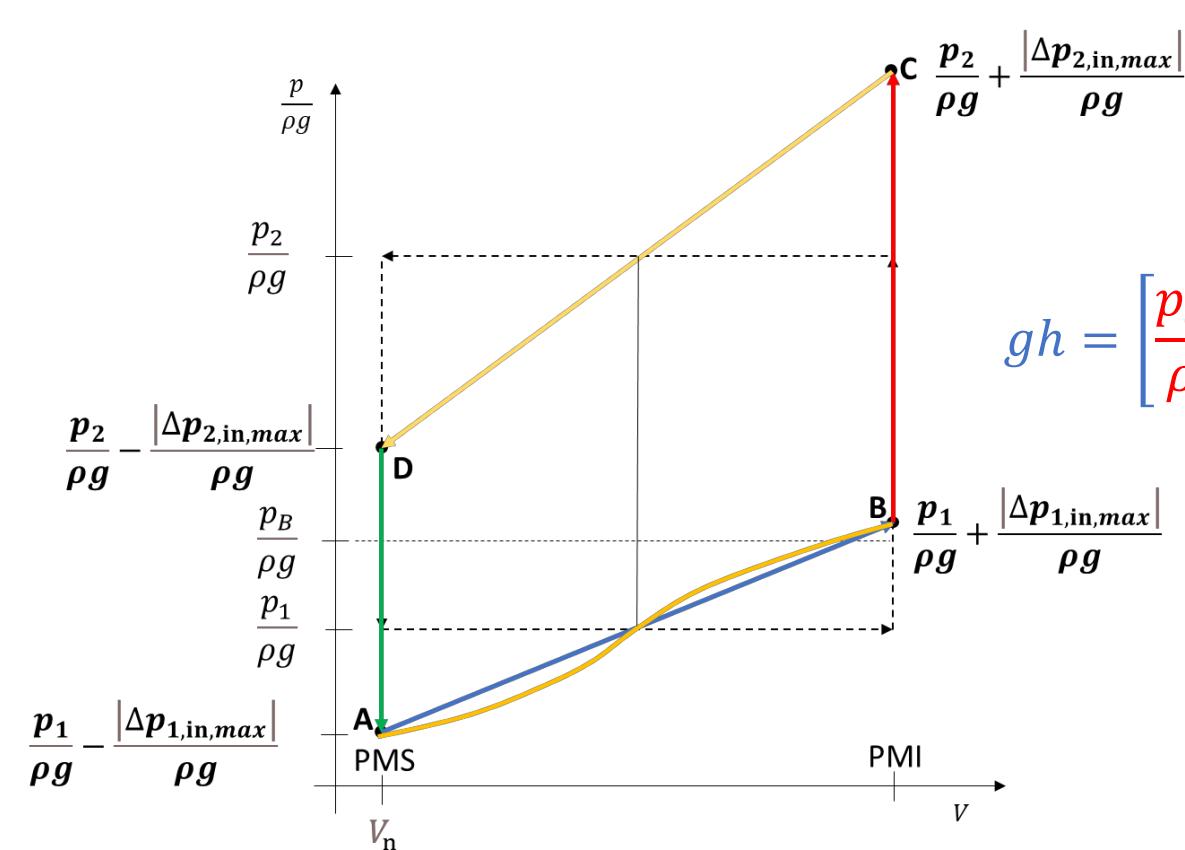


Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto

Che impatto hanno gli effetti inerziali sullo scambio energetico?



$$gh = \frac{p_e^0}{\rho} - \frac{p_i^0}{\rho}$$



$$gh = \left[\frac{p_e}{\rho} + g(z_i + \Delta z) + \frac{C_e^2}{2} \right] - \left(\frac{p_i}{\rho} + gz_i + \frac{C_i^2}{2} \right)$$

Si tratta di valori medi di pressione!!



$$gh = g(z_1 + z_2)$$

Non c'è nessuna influenza sullo scambio energetico!

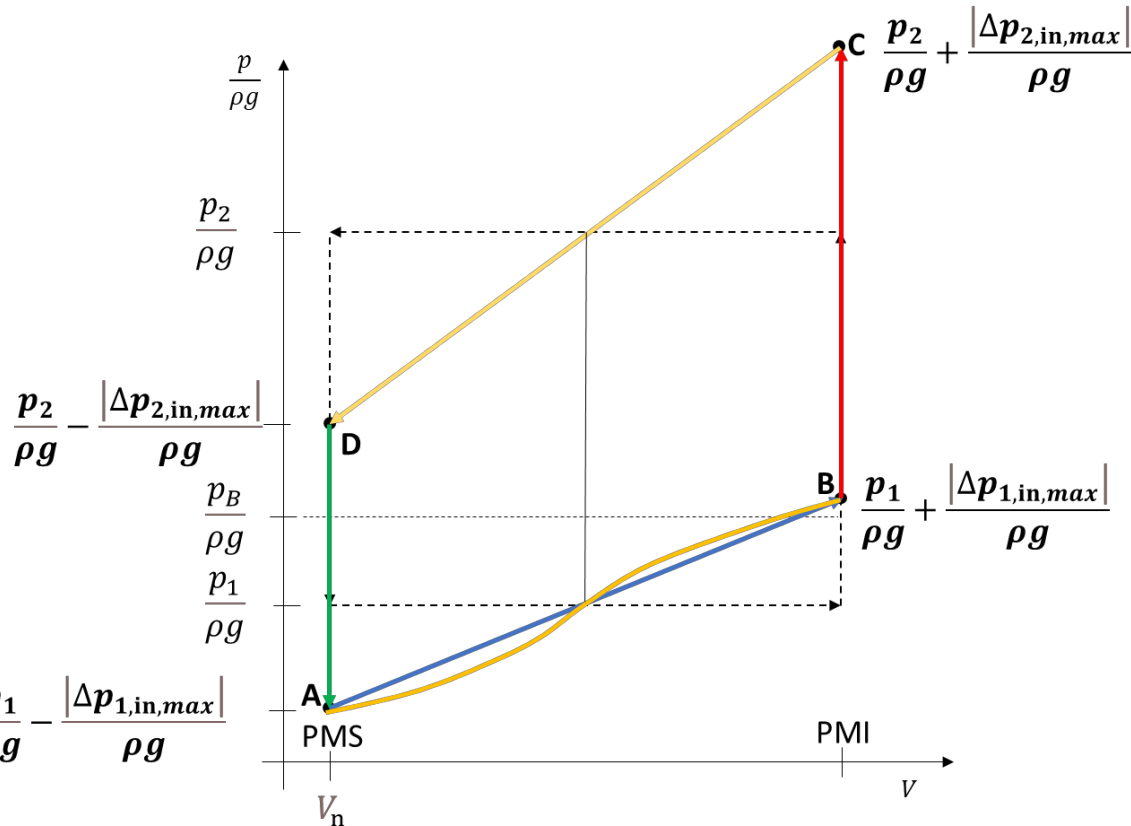
Diagramma indicato «**INERZIALE**» – Ipotesi semplificative: fluido perfetto

Perché sono da conteggiare?

Danno informazioni sui valori massimi e minimi di pressione all'interno del cilindro

- La pressione minima del ciclo **non deve scendere** al di sotto di p_v , per non rischiare l'insorgere della **cavitazione**:

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{\Delta p_{1,in,max}}{\rho g}$$



- La pressione massima non deve superare il limite strutturale

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{\Delta p_{2,in,max}}{\rho g}$$

Domande, Curiosità, Dubbi, Perplessità?

PROF. ING. ALBERTO BENATO, PH.D.

ASSOCIATE PROFESSOR

TURBOMACHINERY & ENERGY SYSTEMS GROUP

DEPARTMENT OF INDUSTRIAL ENGINEERING - UNIVERSITY OF PADOVA
VIA VENEZIA 1 - 35131 - PADOVA
BLDG. EX DIM - 5TH FLOOR - ROOM 19

TEL. 049 827 6752

MAIL: ALBERTO.BENATO@UNIPD.IT

WEBSITE: RESEARCH.DII.UNIPD.IT/TES/

