Lezione 12

Ricordo: abbiamo ripreso le notazioni su funzioni.
Siamo interessati a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oppure $f: D \to \mathbb{R}$ per D opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
D è detto <u>dominio</u> della funzione.

<u>Es.</u> $f(x) = \frac{1}{x}$.

Dominio? (Intendendo sempre: il più grosso (nel senso dell'inclusione) sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui f è definita).
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

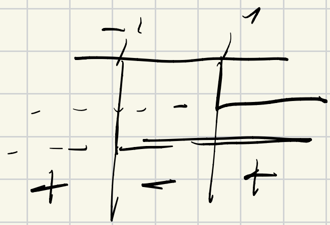
<u>Es.</u> $x \mapsto \sqrt{x}$: Dominio è $\{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.
(Scriveremo $x \geq 0$).

<u>Es.</u> $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$D: \begin{cases} \sqrt{x^2-1} \neq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \iff x^2-1>0$$

vuol dire: se x^2-1 deve essere ≥ 0 e anche $\neq 0$ perché $\sqrt{x^2-1}$ deve essere diversa da zero, basta che sia $x^2-1>0$

$$x^2-1>0 \Rightarrow (x-1)(x+1)>0$$



D: $x<-1$, $x>1$.

<u>Segno di una funzione</u>: si intende dove $f(x) \geq 0$ o $f(x) \leq 0$.

<u>Es.</u> $f(x) = x^2-3x+2$.

$D = \mathbb{R}$.

$$f(x) \geq 0 \iff x^2-3x+2 \geq 0$$

$$\Delta = 9-8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

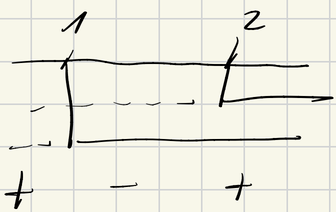
(OSS: $2+1 = 3$, $2 \cdot 1 = 2$

$$x^2 - 3x + 2$$)

$x^2 - bx + c = 0$

Le soluzioni di una eq. di II grado hanno come somma il termine noto b e come prodotto l'opposto del coefficiente di x, b esercizio!).

$$f(x) = (x-2)(x-1) \geq 0$$



$f(x) \geq 0$ per $x \geq 2$, $x \leq 1$.

Composizione di funzioni

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$g \circ f$ è la funzione composta o la composizione di f e g ed è definita così:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g \circ f : A & \longrightarrow & C \\ a & \longmapsto & g(f(a)) \end{array}}$$

Quindi:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\quad g \quad} C$$

$$a \longmapsto f(a)$$

$$f(a) \longmapsto g(f(a))$$

Esempio: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

$$f(x) = e^x \qquad g(x) = \sin(x)$$

$$(g \circ f)(x) = \sin(e^x).$$

Oss. Posso anche calcolare $f \circ g$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sin(x) \longmapsto e^{\sin(x)}$$

Notare: $e^{\sin(x)} \neq \sin(e^x)$, quindi

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Oss Se scrivo "$g \circ f$" è perchè voglio calcolarlo in x che scrivo a destra del simbolo di funzione (scrivo $h(x)$ e non ${}^{x}h$).

allora $g \circ f$ è naturale perchè

$$(g \circ f)(x)$$

graficamente ci porta a calcolare prima f e poi g.

Funzione inversa

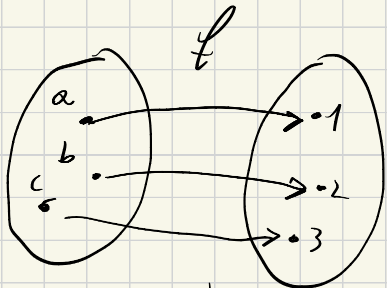
Suppongo che f biettiva, $f: A \to B$.
Allora so che per ogni $b \in B$ esiste

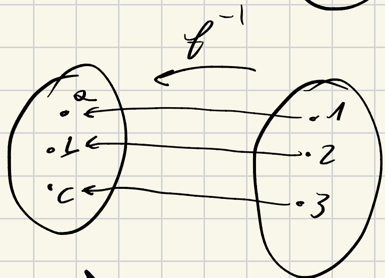
Un solo $a \in A$ tale che $f(a)=b$.

Definisco $f^{-1}: B \to A$, che chiamo <u>inversa di</u> f la funzione

$$f^{-1}(b)=a \iff f(a)=b.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$





<u>Attenzione</u> $f^{-1}(x)$ **NON È** $\dfrac{1}{f(x)}$.

se voglio $\dfrac{1}{f(x)}$ devo scrivere $(f(x))^{-1}$.

<u>Ora</u> se f non è biettiva, l'inversa non la posso definire, perché dato $b \in B$ non so se esiste $a \in A$ tale che $f(a)=b$

(perché f potrebbe non essere suriettiva);
ma se anche fosse suriettiva, avrei più di un a tale che $f(a)=b$, perché f non sarebbe iniettiva, almeno per qualche b, quindi non saprei come scegliere a.

<u>Esempio</u>:
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

non è iniettiva e neppure suriettiva

$f(1) = f(-1) = 1$ $\qquad$ $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $x^2 = -1$.

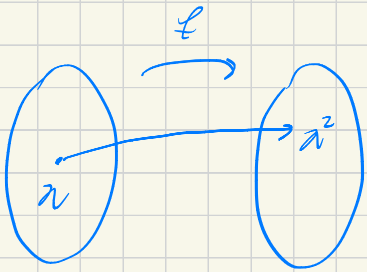
Se considero
$$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

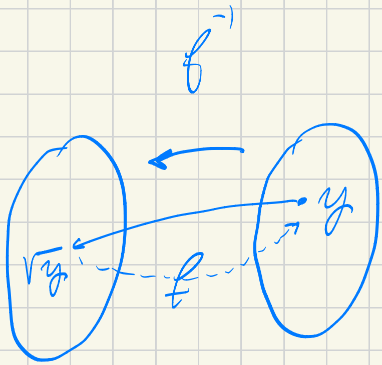
e definisco
$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$x \longmapsto x^2$$

questa è una funzione biettiva, e la sua inversa è $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $f^{-1}: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(Scrivo $y = x^2$, allora $x = \sqrt{y}$, quindi

$(\sqrt{y})^2 = y$, cioè $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$)





$y = x^2$ per un solo x

$x = \sqrt{y}$

infatti: $(\sqrt{y})^2 = y$).

Oss. Se f è invertibile

$$f^{-1}\circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$$

$$a \longmapsto a$$

perché $f^{-1}(f(a)) = a$ per definizione di f^{-1}.

(infatti: $f^{-1}(b)$ è quell'elemento a tale che $f(a) = b$. Se $b = f(a)$, l'elemento che cerco è proprio a!)

Quindi: $f^{-1} \circ f$ è la funzione identità dell'insieme A, denotata id_A,

$$id_A : A \longrightarrow A$$
$$a \longmapsto a.$$

Esempio Esponenziale e logaritmo

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$
$$x \longmapsto e^x$$

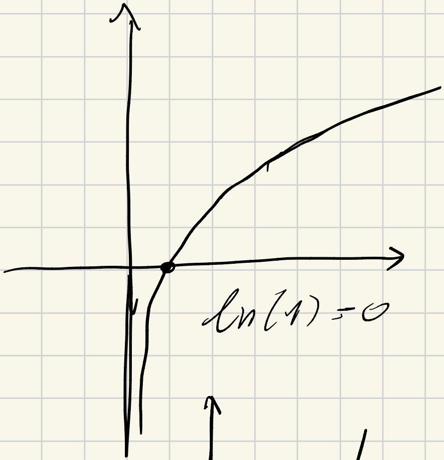
e = numero di Nepero $\approx 2{,}7$.

$2 < e < 3$.

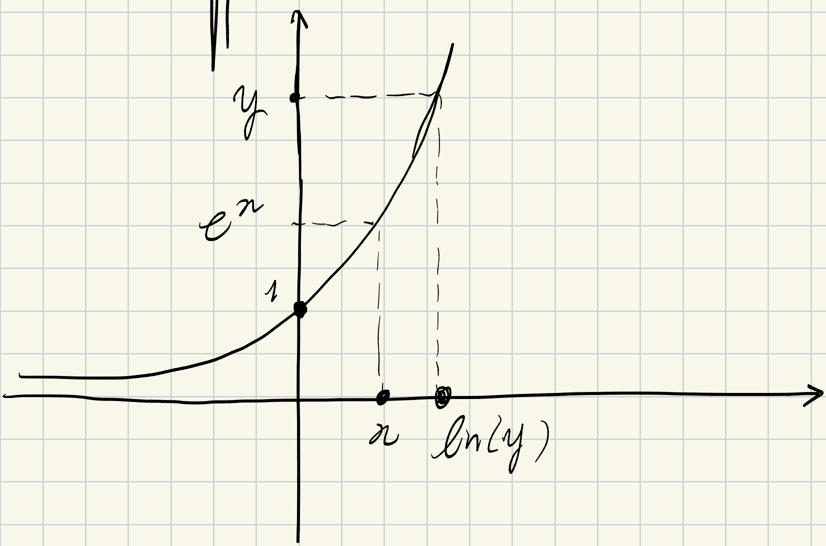
$e^0 = 1$.

La funzione inversa dell'esponenziale è il logaritmo naturale

$\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

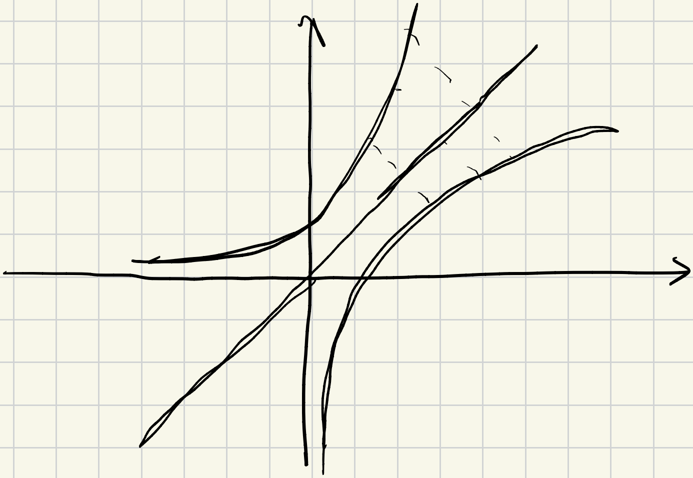


$\boxed{\ln(x) \text{ è definito per } x > 0}$



$\ln(e^x) = x$

Così il grafico di ln è simmetrico (per definizione) del grafico di exp rispetto alla bisettrice del I e III quadrante



<u>Esempio</u> Trovare il dominio della funzione

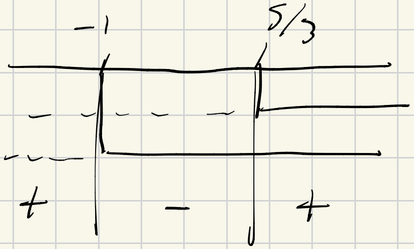
$$f(x) = \ln(3x^2 - 2x - 5)$$

e studiarne il segno:

D: $3x^2 - 2x - 5 > 0$

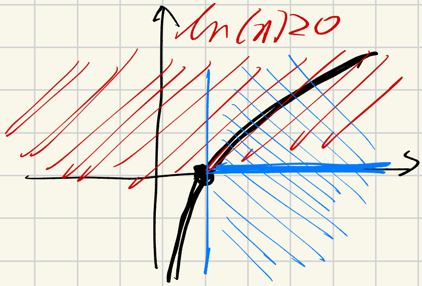
$$\Delta = 4 + 60 = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} \begin{cases} \dfrac{2+8}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3} \\[2ex] \dfrac{2-8}{6} = -\dfrac{6}{6} = -1 \end{cases}$$



D: $x < -1, \quad x > 5/3.$

Segno: $\ln(3x^2-2x-5) \geq 0.$



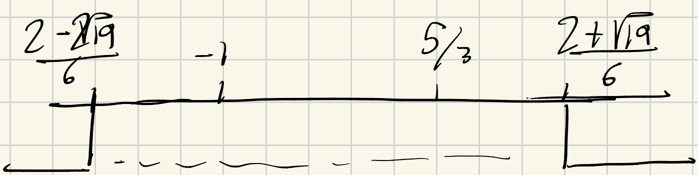
$\ln(x) > 0 \iff x > 1.$

$3x^2-2x-5 > 1 \iff 3x^2-2x-6 > 0$

$\Delta = 4+72 = 76$

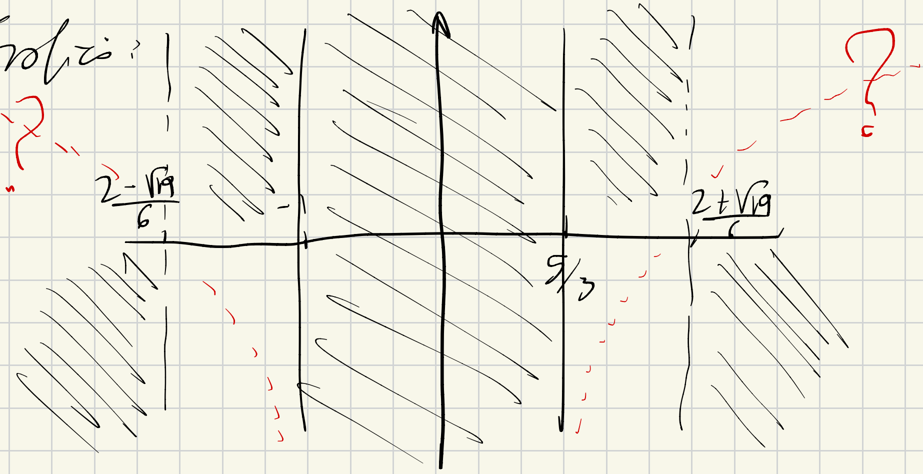
$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{76}}{6}$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3}$



Perciò $f(x) > 0$ per $x > \frac{2+\sqrt{19}}{6}$, $x < \frac{2-\sqrt{19}}{6}$

Grafici:



Funzioni definite su $\mathbb{N}$

Si chiamano <u>successioni</u>

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Ho una sequenza di numeri reali,

$$f(0),\ f(1),\ f(2),\ \dots$$

che chiamo <u>successione</u> di numeri reali.

<u>Esempio</u> $\quad n \longmapsto n^2 = a_n$

n	n^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
...	...

Notazione Spesso scrivo $n \mapsto a_n$ per denotare la successione, intendendo che
$$a_n = f(n) \quad , \; f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Nell'esempio, $a_n = n^2$; inoltre, sempre nell'esempio, $a_n \geq a_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$.

Una successione $n \mapsto a_n$ si dice crescente se $a_n \geq a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, e si dice decrescente se $a_n \leq a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Dirò che $n \mapsto a_n$ è definitivamente crescente o decrescente se lo è da un certo punto in poi, cioè se $\exists N_0$ tali che $a_n \geq a_{n-1}$, $\forall n \geq N_0$ oppure $a_n \leq a_{n-1}$, $\forall n \geq N_0$.

<u>Oss.</u> Posso anche chiamare successioni funzioni definite per i numeri naturali $\geq M$, dove M è un fissato numero naturale

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq M\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n.$$

$M = 1$

<u>Esempio:</u> $n \longmapsto \frac{1}{n}$ è una successione decrescente definita su $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$.

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1}$, $\forall n$, perché $n \geq n-1$, $\forall n$.

n	$1/n$
1	1
2	1/2
3	1/3
4	1/4
...	...

Esempio $n \mapsto (-1)^n$.

n	$(-1)^n$
0	1
1	-1
2	1
3	-1
4	1
...	...

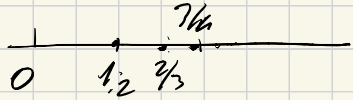
Questa successione oscilla tra 1 e -1.

Non è né crescente né decrescente, neppure definitivamente.

Esempio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$n \mapsto a_n = \frac{n}{n+1}$$

n	a_n
0	0
1	1/2
2	2/3
3	3/4
4	4/5
...	...



Mostro che la successione è crescente, cioè che

$$a_{n+1} \geq a_n \ , \ \forall n \geq 0.$$

(Oss. stessa cosa che scrivere $a_n \geq a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$).

Verifica: mi chiedo se è vero che

$$\frac{n+1}{n+2} \overset{?}{\geq} \frac{n}{n+1}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & ? & \parallel \\ a_{n+1} & \geq & a_n \end{array}$$

Studio la disequazione

$$\frac{n+1}{n+2} \geq \frac{n}{n+1} \Longrightarrow \frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)} \geq \frac{n(n+2)}{\underbrace{(n+1)(n+2)}_{\text{MCD}}}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \geq \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow (n+1)^2 \geq n(n+2) \quad \text{perché } (n+1)(n+2)>0 \ \forall n.$$

$$\Rightarrow \cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 \geq \cancel{n^2} + \cancel{2n}$$

$1 \geq 0$ Vero sempre, cioè $\forall n$,

Quindi

$\frac{n+1}{n+2} \geq \frac{n}{n+1}$ è vera $\forall n$.

Cioè la successione è crescente.

Noto anche che

$$a_n < 1, \forall n.$$

Infatti: $\frac{n}{n+1} < 1 \iff n < n+1$

$\iff 0 < 1$, vero sempre.

Quindi, in qualche modo, la successione

$n \mapsto \frac{n}{n+1}$

si avvicina a 1 (perché è crescente)

e però non raggiunge mai 1, perché

$\frac{n}{n+1} \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Definizione</u> Sia $n \mapsto a_n$ una successione.

(1) Dico che $l \in \mathbb{R}$ è il <u>limite</u> di a_n

e scrivo

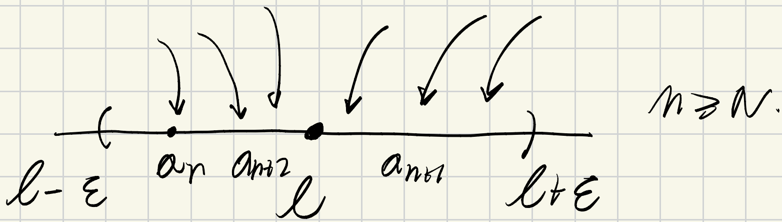
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_n a_n = l$$

se: $\forall \, \varepsilon > 0$ (piccolo a piacere) esiste N (che dipende dal numero reale ε scelto) tale che

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$$

per ogni $n \geq N$.

Cioè: scelto ε, da un certo punto in poi (cioè per $n \geq N$) la successione è contenuta in un segmento lungo 2ε e centrato in ℓ:



(2) Dico che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n} a_n = +\infty$$

se $\forall\, M>0$, $M \in \mathbb{R}$ (grande a piacere) esiste N (che dipende da M) tale che

$$a_n \geq M, \quad \forall\, n \geq N.$$