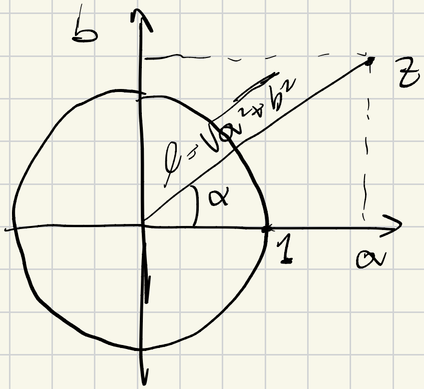
Lezione 11

Ricordo: se $z = a+ib$, $z = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$.



Oss. Noto che se $z = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$
allora

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha))$$

Più in generale, la forma trigonometrica è comoda per calcolare i prodotti di numeri complessi:

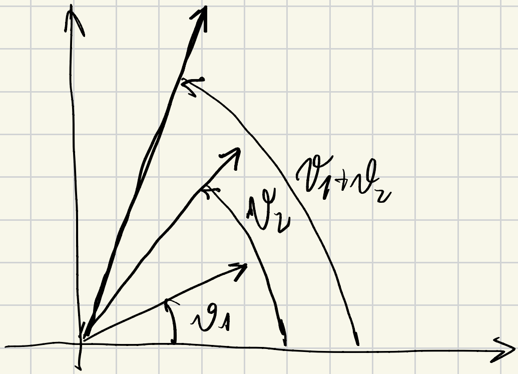
$$z_1 = \rho_1(\cos(\vartheta_1) + i\,\mathrm{sen}(\vartheta_1)), \quad \rho_1 = |z_1|$$

$$z_2 = \rho_2(\cos(\vartheta_2) + i\,\mathrm{sen}(\vartheta_2)), \quad \rho_2 = |z_2|$$

allora il prodotto di z_1 e z_2 è

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2)(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\,\mathrm{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2)).$$

Esercizio: Mostrare (con metodi trigonometrici) che vale questa formula



Chiaro che $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho = |z_1 \cdot z_2| = \rho_1 \cdot \rho_2$.

Per l'angolo: calcolo

$$(\cos\vartheta_1 + i \operatorname{sen}\vartheta_1)\cdot(\cos\vartheta_2 + i\operatorname{sen}\vartheta_2) \overset{\text{def.}}{=}$$

$$= \cos\vartheta_1 \cdot \cos\vartheta_2 - (\operatorname{sen}\vartheta_1 + \operatorname{sen}\vartheta_2) + $$
$$+ i(\cos\vartheta_1 \operatorname{sen}\vartheta_2 + \operatorname{sen}\vartheta_1 \cos\vartheta_2)$$

$$= \cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i \operatorname{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2).$$

Esercizio Consideriamo l'equazione $\boxed{X^n = 1}$ e cerco tutte le sue soluzioni in $\mathbb{C}$.

Voglio i numeri complessi

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

tali che

$$z^n = 1.$$

Cioè:

$$z^n = \rho^n(\cos(n\vartheta) + i\,\mathrm{sen}(n\vartheta)) = 1$$

Scrivo $1 = 1\,(\underbrace{\cos(0)}_{1} + i\,\underbrace{\mathrm{sen}(0)}_{0})$. Quindi:

$$\begin{cases} \rho^n = 1 \Rightarrow \rho = 1 \text{ perché } \rho > 0 \\ \cos(n\vartheta) = \cos(0) \\ \mathrm{sen}(n\vartheta) = \sin(0) \end{cases}$$

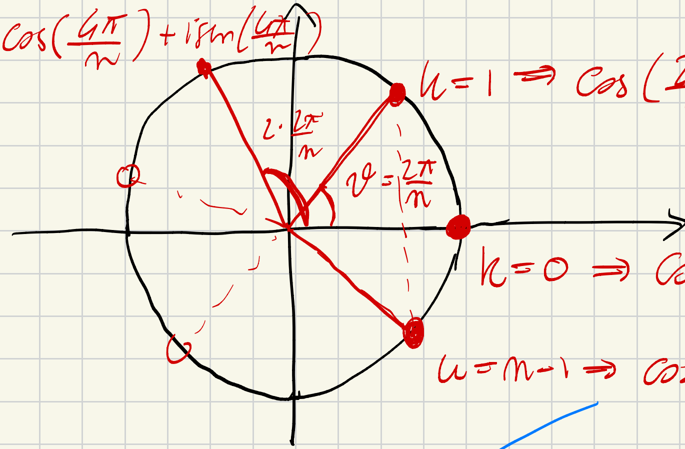
$$\Rightarrow \vartheta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

$$\rightarrow z = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

per $k = 0, \dots, n-1$

$k=2 \Rightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right)$

$k=1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$



$k=0 \Rightarrow \cos(0)+i\,\mathrm{sen}(0)=1$

$k=n-1 \Rightarrow \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$

$= \cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{2\pi}{n}\right)$

$= \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)-i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

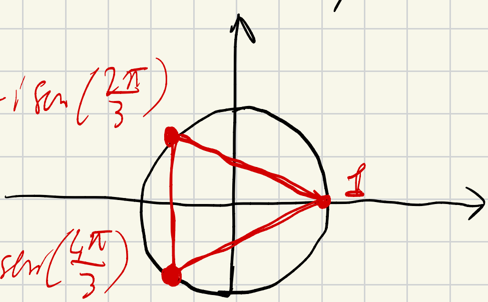
$$\frac{2(n-1)\pi}{n} = \frac{2n\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} = 2\pi - \frac{2\pi}{n}$$

$$\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{n}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{n}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = -\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

<u>Oss.</u> Le soluzioni di $x^3=1$ che abbiamo determinato in uno degli esercizi precedenti si possono anche determinare come nell'esercizio precedente per $n=3$:

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$



$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Se $n=3$, ho infatti

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

$k=0$: $\quad 1$

$k=1$: $\quad \cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$

$k=2$: $\quad \cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}$.

Esercizio Trovare un numero complesso che elevato alla seconda dia i.

Svolgimento: Chiamo $\boxed{z=a+ib}$ $a,b\in\mathbb{R}$. Deve essere:

$$z^2=i \Rightarrow (a+ib)^2=i$$

$$\Rightarrow (a+ib)(a+ib)=i$$

$$\Rightarrow a^2-b^2+2abi=i=0+1\cdot i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=0 \Rightarrow (a+b)(a-b)=0 \begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array} \\ 2ab=1 \end{cases}$$

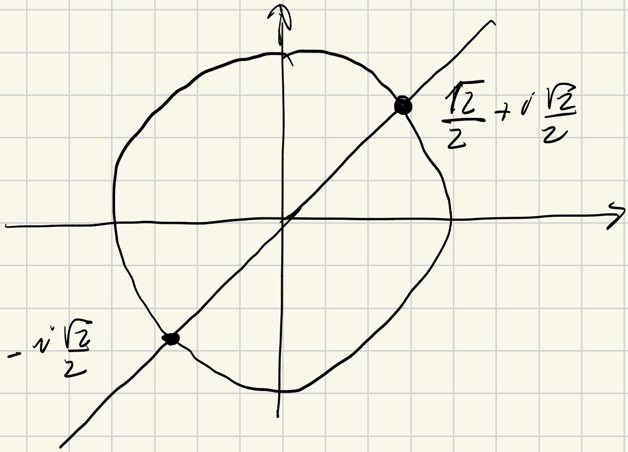
Due casi:

$a = b \Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = b.$

$a = -b \Rightarrow -2a^2 = 1$, che non ha soluzioni in $\mathbb{R}$.

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

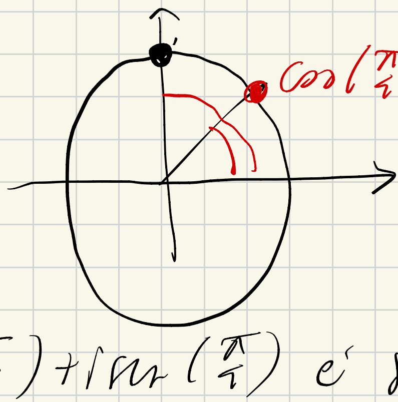
$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$



<u>Oss.</u> Potevo anche osservare che $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})$ dunque sicuramente,

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = i$$

quindi $(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i\,\mathrm{sen}(n\vartheta)$



Se $\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})$ è soluzione di

$x^2 = i$, anche $-\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ lo è,
e così ho trovato 2 soluzioni, che sono le sole soluzioni perché un'equazione di II grado ha esattamente 2 soluzioni in $\mathbb{C}$
(T. fondamentale dell'algebra).

Es. Trovare le soluzioni di

$$x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Passo 1 $\quad y = x^2$ e risolvo $y^2 + y + 1 = 0$.

$$y = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(esercizio precedente).}$$

Passo 2 $\quad$ Risolvo le due equazioni

$$\boxed{x^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \; ; \quad \boxed{x^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Risolvo $\boxed{x^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Primo modo:

$$z = a + ib$$

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2ab\,i = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \\ 2ab = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{4a}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - \frac{3}{16a^2} = -\frac{1}{2}$$

$$16a^4 + 8a^2 - 3 = 0 \qquad (a \in R)$$

$$t = a^2$$

$$16t^2 + 8t - 3 = 0$$

$$\Delta = 64 + 4 \cdot 3 \cdot 16$$

$$\overset{!}{=} 16 \cdot (4 + 4 \cdot 3)$$

$$\overset{!}{=} 16 \cdot (4 + 12)$$

$$\overset{!}{=} 16^2$$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{16^2}}{32} = \frac{-8 \pm 16}{32}$$

$$\frac{-8-16}{32} = -\frac{24}{32}$$

$$\frac{-8+16}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$t = -\frac{24}{32} \Rightarrow a^2 = -\frac{24}{32} \Rightarrow$ no soluzioni in a.

$$t = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

$$a = 1/2$$

$$a = -1/2$$

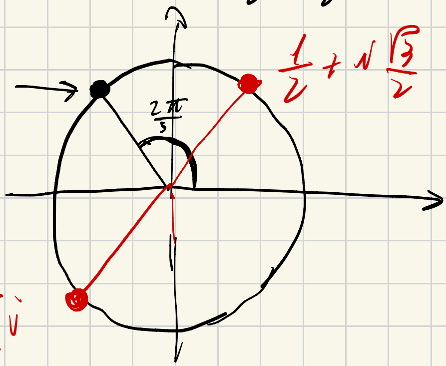
$$b = \frac{\sqrt{3}}{4a} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a + ib = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a + ib = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi$



$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Secondo metodo

$$z^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \Rightarrow z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

sostituisco $z^2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

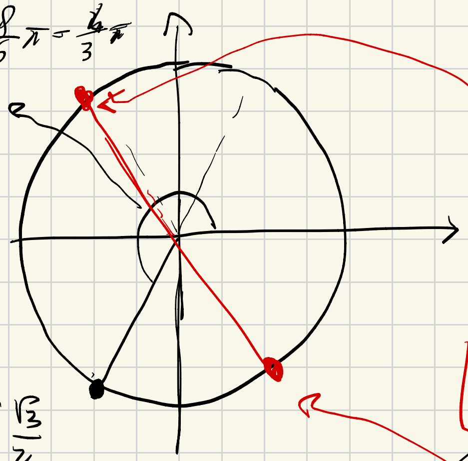
perchè $z = \cos(\vartheta) + i \operatorname{sen}(\vartheta) \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 = \cos(2\vartheta) + i \operatorname{sen}(2\vartheta)$

Quindi, una delle due soluzioni si trova dimezzando l'angolo, l'altra con un segno − davanti.

Risolvo ora $\boxed{x^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{8}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi$



$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$z = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ risolve $z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Anche $-\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Anche posso risolvere algebricamente: esempio

$z = a + ib$

$a^2 - b^2 + 2aib = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

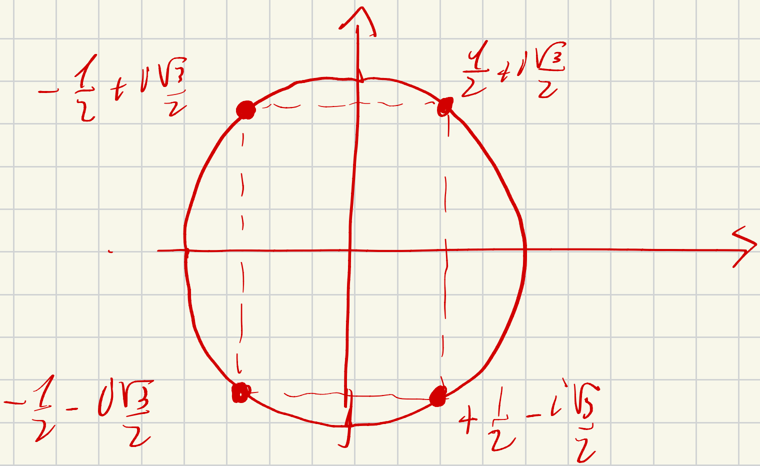
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \\ 2ab = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \ldots$$

In tutto, ho 4 soluzioni dell'equazione

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

che sono:

$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



Oss In $\mathbb{C}$ non esiste un ordinamento come su $\mathbb{R}$, cioè non so dare significato alla condizione $i > 0$, $i < 0$, non so cioè comparare i e 0.

(a) Se $i > 0 \Rightarrow i^2 > 0$, ma $i^2 = -1$, e $-1 < 0$. Contraddizione.

(b) Se $i < 0 \Rightarrow -i > 0 \Rightarrow (-i)(-i) > 0 \Rightarrow i^2 > 0$, ma $i^2 = -1 < 0 \Rightarrow$ contraddizione.

Poiché (a) e (b) implicano una contraddizione, sono entrambe false.

Funzioni

Ricordo: $f: A \longrightarrow B$, A, B insiemi,
è una regola che associa ad ogni elemento
di A uno ed un solo elemento di B.

(◦) A: dominio di f
(◦) B: codominio di f
(◦) $Im(f) = \{ b \in B \mid \exists a \in A \text{ con } f(a) = b \}$.
(immagine di f).
$Im(f) \subseteq B$.

In generale, non c'è ragione per cui
$Im(f)$ debba essere uguale a B:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

$$Im(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}.$$

(◦) f iniettiva: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(x)$
$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

(·) f suriettiva: $\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A \mid f(x) = b$.

(·) f biettiva: iniettiva e suriettiva.

<u>Esempi</u> (1) $$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

È iniettiva, non è suriettiva, e l'immagine è l'insieme dei numeri pari di $\mathbb{Z}$.

(2) $f : \mathbb{Z} \to P = \{\text{numeri pari di } \mathbb{Z}\}$

adesso f è biettiva. (f la stessa di prima, $f(n) = 2n$).

<u>Oss.</u> Una funzione biettiva mette in corrispondenza tutti gli elementi di A con quelli di B in modo tale che i due insiemi A e B siano identificati da f: ogni elemento di B corrisponde tramite f ad un solo elemento di A

e viceversa. In particolare, se A e B sono due insiemi con un numero finito di elementi, e

$$f : A \to B$$

è una funzione biettiva, allora A e B hanno lo stesso numero di elementi.
Più in generale, dico che due insiemi A e B (anche infiniti) hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione biettiva tra loro.
Ad esempio

$$\mathbb{Z} \quad e \quad P = \{pari\}$$

hanno la stessa cardinalità (anche se $P \subseteq \mathbb{Z}$, $P \neq \mathbb{Z}$).