METODI STATISTICI PER LA BIOINGEGNERIA (B)

PARTE 4: VERIFICA DELLE IPOTESI MEDIANTE TEST STATISTICI PARAMETRICI (PRIMA PARTE)

A.A. 2025-2026

Prof. Martina Vettoretti

CASO

- Un’azienda farmaceutica ha sviluppato un nuovo farmaco per il trattamento della sclerosi multipla. Il nuovo farmaco (A) viene confrontato con un farmaco esistente (B).
- 100 individui affetti da sclerosi multipla recidivante remittente ad elevata attività vengono assegnati randomicamente al farmaco A o al farmaco B.
- Dopo 1 anno di trattamento, si quantifica l’efficacia dei due farmaci contando il numero di nuove lesioni mieliniche rilevate tramite risonanza magnetica dell’encefalo.
  - Farmaco A: numero medio di nuove lesioni per individuo pari a 0,5
  - Farmaco B: numero medio di nuove lesioni per individuo pari a 0,7
- Possiamo dire che il farmaco A è più efficace del farmaco B nel prevenire nuove lesioni?

VERIFICA DELLE IPOTESI

Campione aleatorio di n variabili aleatorie iid con funzione di distribuzione $F_X(x)$:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

di cui noi osserviamo una realizzazione:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$F_X(x)$ è incognita o parzialmente nota (nota tranne che per alcuni parametri incogniti).

Obiettivo: utilizzare una realizzazione del campione aleatorio, ovvero un insieme di dati, per **verificare** qualche **ipotesi** riguardo $F_X(x)$ → **statistica inferenziale**

IPOTESI STATISTICA

- Un'**ipotesi statistica** è un'affermazione che riguarda una caratteristica della distribuzione delle variabili aleatorie X_i del campione aleatorio.
- Non sappiamo a priori se l'ipotesi statistica sia vera o meno.
- **Test statistici per la verifica delle ipotesi**: metodi statistici per verificare un'ipotesi statistica utilizzando i dati di un campione aleatorio.
- Nota: si dice verificare un'ipotesi statistica, ma in realtà i test statistici cercano di **confutare un'ipotesi statistica**, non di provarla.

ESEMPIO

Un'azienda che produce sensori elettrochimici dichiara che il suo nuovo sensore (S2) fornisce misure più accurate rispetto al precedente (S1).

Ipotesi statistica (H_0): l'errore assoluto di S1 è minore o uguale di quello di S2.

Sensore 1 (S1)

N1 misure (x)

N1 valori di riferimento (x_{ref})

N1 valori di errore assoluto: $e = |x - x_{ref}|$

Sensore 2 (S2)

N2 misure (x')

N2 valori di riferimento (x'_{ref})

N2 valori di errore assoluto: $e' = |x' - x'_{ref}|$

Test statistico per la confutazione dell'ipotesi

Rifiuto di H_0
L'errore assoluto di S2 è significativamente minore di S1

Mancato rifiuto di H_0
Le differenze osservate nei valori di errore dei due sensori potrebbero essere dovute al caso.

TEST STATISTICI PARAMETRICI

Quando $F_X(x)$ è nota a meno di uno o più parametri incogniti, l'ipotesi statistica è un'affermazione che riguarda uno di questi parametri.

Test statistico parametrico: test statistico che utilizza i dati di una realizzazione di un campione aleatorio, avente **distribuzione nota a meno di alcuni parametri**, per verificare un'ipotesi statistica che riguarda un parametro incognito di tale distribuzione.

Esempio:

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, iid con μ e σ^2 incogniti. Ci chiediamo se il valore atteso μ può essere pari ad un certo valore μ_0 oppure no → ipotesi statistica: $\mu = \mu_0$

I PRINCIPALI STEP PER LA COSTRUZIONE DI UN TEST STATISTICO PARAMETRICO (1/3)

1. Assunzioni sulla distribuzione delle variabili aleatorie del campione, X_i
   - Assumiamo che le X_i siano iid e abbiano distribuzione $F_X^{\theta}(x)$ nota a meno del parametro θ

2. Formulazione dell'ipotesi statistica, detta anche **ipotesi nulla**, H_0, riguardo θ
   - Esempi di ipotesi nulla:
     - H_0: $\theta = \theta_0$
     - H_0: $\theta \leq \theta_0$

   dove θ_0 è una costante, un numero

I PRINCIPALI STEP PER LA COSTRUZIONE DI UN TEST STATISTICO PARAMETRICO (2/3)

3. Definizione della **statistica del test:** una variabile aleatoria Y funzione del campione aleatorio che, se H_0 è vera, ha una certa distribuzione nota.
   - $Y = g(\boldsymbol{X}),\ \boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$
   - Se H_0 è vera → $Y \sim F_{Y|H_0\ vera}$ con $F_{Y|H_0\ vera}$ completamente nota

4. Definizione del **livello di significatività del test,** α → rappresenta la probabilità di rifiutare l'ipotesi nulla quando invece essa è vera.
   - Questo tipo di errore è detto **errore di prima specie.**
   - α rappresenta l'errore di prima specie che si è disposti a tollerare (tipicamente piccolo).

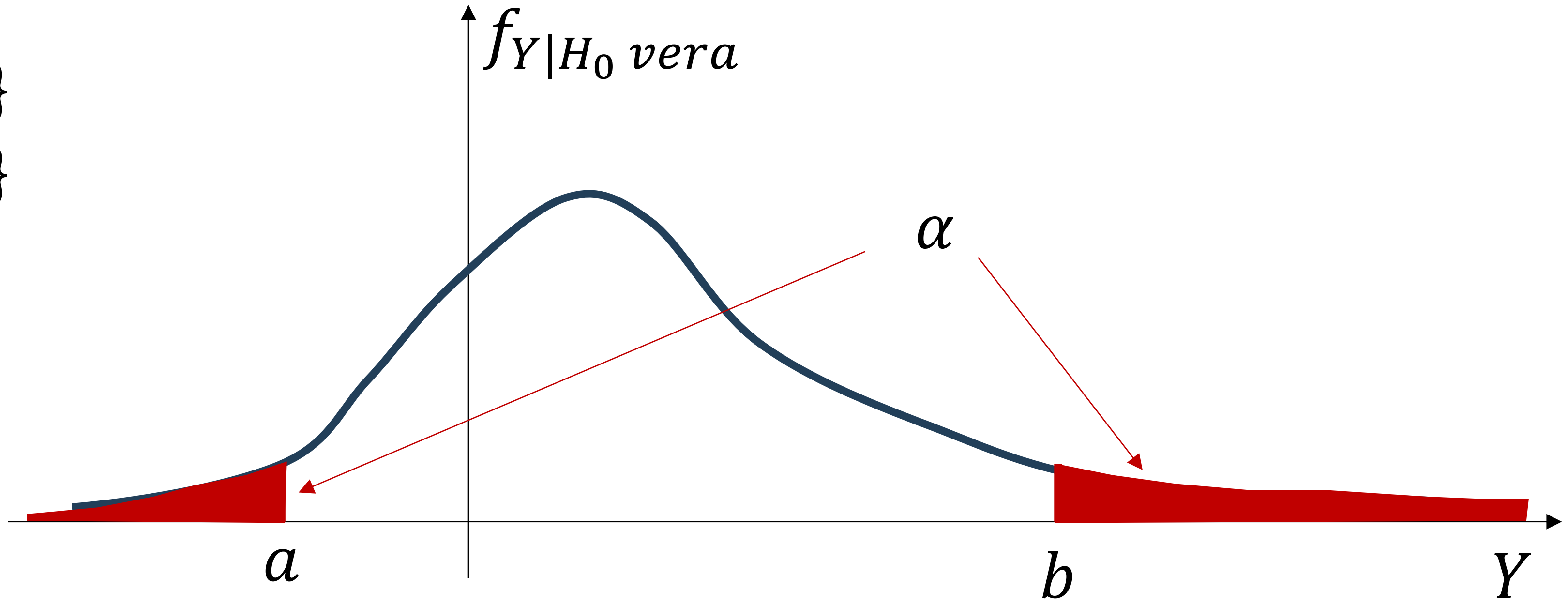
I PRINCIPALI STEP PER LA COSTRUZIONE DI UN TEST STATISTICO PARAMETRICO (3/3)

5. Definizione della **regione critica** o **regione di rifiuto del test**, R, a partire da $F_{Y|H_0\ vera}$ ed α.
   - Sia y il valore assunto dalla statistica del test Y.
   - La regione critica è un opportuno insieme di numeri reali, R, tale che se si rifiuta H_0 quando $y \in R$, allora la probabilità di commettere un errore di prima specie è α.
   - **Regola decisionale:**
     - Se $y \in R$ si rifiuta H_0 → l'esito del test è <u>positivo</u>
     - Altrimenti, se $y \notin R$ → non ci sono sufficienti prove per rifiutare H_0. Si dice anche che si «accetta H_0», ma in realtà in questo caso non si può dire nulla sulla validità di H_0 → l'esito del test è <u>negativo</u>

ESMPIO DI REGIONE CRITICA

- Immaginiamo che Y sia una variabile aleatoria continua. Se H_0 è vera ha una certa densità di probabilità nota: $f_{Y|H_0\ vera}$.
- La regione di rifiuto è una regione di R dove $f_{Y|H_0\ vera}$ assume valori piccoli.
- L'area sottesa da $f_{Y|H_0\ vera}$ in R deve essere pari ad α.

$$R_1 = \{y < a\}$$
$$R_2 = \{y > b\}$$
$$R = R_1 \cup R_2$$



STEP PER L'APPLICAZIONE DI UN TEST STATISTICO

Principali step che un analista deve effettuare per verificare **un'ipotesi statistica**, H_0, a partire da una realizzazione di un campione aleatorio $x_1, x_2, \dots, x_n$:

1. Scelta di un opportuno **test statistico** per la verifica di H_0.
2. Verifica della plausibilità delle **assunzioni** sulla distribuzione del campione aleatorio, necessarie all'applicazione del test.
3. Scelta del **livello di significatività** α. Valori tipici per α sono 10%, 5%, 1%.
   - L'analista decide l'errore di prima specie che è disposto a tollerare.
4. Calcolo del valore della **statistica del test**, y, a partire dai dati del campione.
5. Definizione della **regione critica** R sulla base del valore di α scelto.
6. **Decisione finale**:
   - $y \in R$ → H_0 è rifiutata
   - $y \notin R$ → non ci sono sufficienti elementi per rifiutare H_0 → H_0 è «accettata»

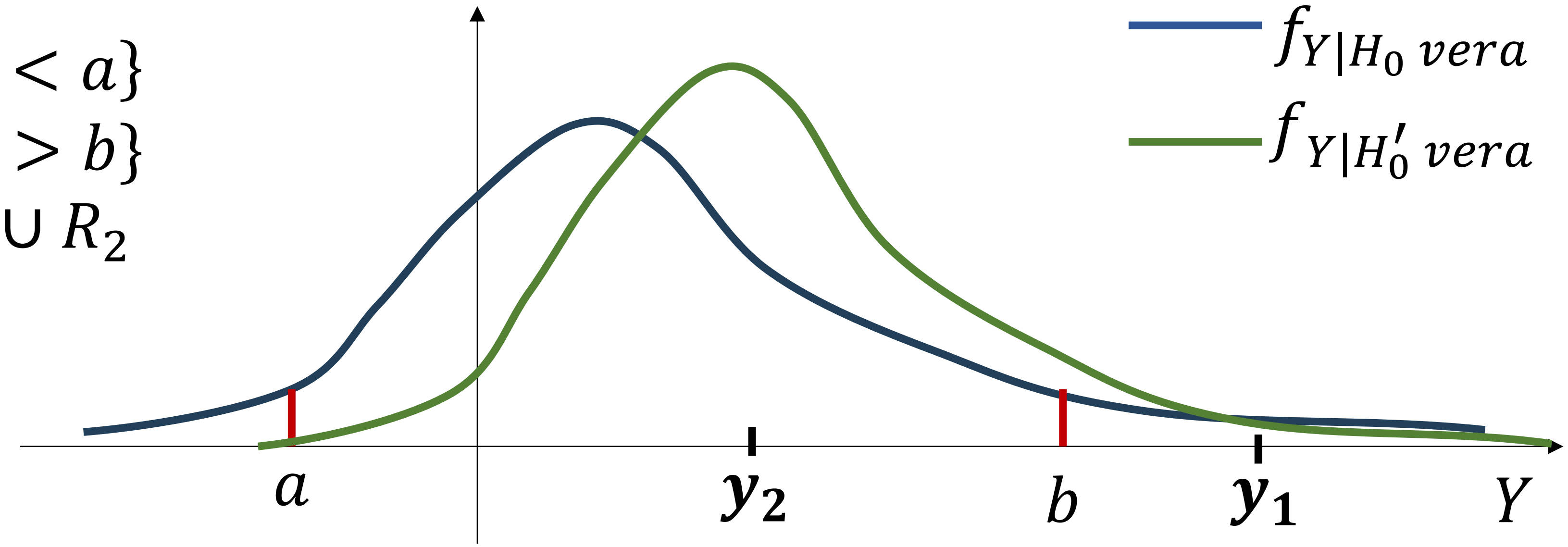
ESITO DI UN TEST STATISTICO

- I test statistici sono messi a punto con lo scopo di <u>confutare</u> una certa ipotesi nulla.
- La statistica del test e la regione critica vengono costruite in modo tale che, **se $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}$** risulta essere molto improbabile che y sia una realizzazione di una variabile aleatoria con distribuzione $F_{Y|H_0\ vera}$ e pertanto **risulta molto improbabile che $\boldsymbol{H_0}$ sia vera.**
  - Se $y \in R$, i dati del campione sono molto poco compatibili con H_0 → abbiamo forti evidenze per rifiutare H_0
  - Per come è costruito il test sappiamo che la probabilità di commettere un errore quando rifiutiamo H_0 è pari ad α.
- **Se $\boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{R}$,** non abbiamo sufficienti evidenze per dire che H_0 non sia vera, però non possiamo neanche dire che H_0 sia vera.
  - Se $y \notin R$ **non possiamo fare nessuna inferenza** sulla distribuzione del campione aleatorio.

ESEMPIO DI ESITI DI UN TEST STATISTICO

- **Caso 1**: il valore della statistica del test è $y_1 \in R$ → H_0 è poco plausibile. Infatti, se H_0 fosse vera, la probabilità di avere un valore di Y vicino a y_1 è molto piccola.
- **Caso 2**: il valore della statistica del test è $y_2 \notin R$ → H_0 è plausibile, potrebbe essere vera. Infatti, se H_0 fosse vera, la probabilità di avere un valore di Y vicino a y_2 è significativamente positiva. Ma y_2 potrebbe essere compatibile con altre ipotesi, per esempio con H'_0. Non possiamo dire quale ipotesi sia vera.

$$R_1 = \{y < a\}$$
$$R_2 = \{y > b\}$$
$$R = R_1 \cup R_2$$



ALCUNI TEST STATISTICI PARAMETRICI

- Test per verificare ipotesi sulla media di una popolazione normale
  - Caso in cui la varianza è nota
  - Caso in cui la varianza è incognita: il t test
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa media
  - Caso in cui le varianze sono note
  - Caso in cui le varianze sono incognite ma uguali
  - Caso in cui le varianze sono incognite e diverse
  - Caso in cui le due popolazioni sono dipendenti
- Test per verificare ipotesi sulla varianza di una popolazione normale
- Test per verificare se due popolazioni normali hanno la stessa varianza

VERIFICA DI IPOTESI SULLA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE CON VARIANZA NOTA

- Supponiamo di disporre di un campione aleatorio $X_1, X_2, \ldots, X_n$ che ipotizziamo essere estratto da una **popolazione normale** con **varianza nota** e **media** (valore atteso) **incognita.**
- Ipotizziamo di voler verificare un'ipotesi statistica sul valore puntuale della media del tipo $\boldsymbol{\mu = \mu_0}$.
- Vediamo passo passo come costruire un test statistico per verificare tale ipotesi.
- Nota: questo lavoro viene generalmente svolto dagli statistici. Noi bioingegneri in genere utilizziamo test statistici già definiti.

1. ASSUNZIONI SULLA DISTRIBUZIONE DEL CAMPIONE ALEATORIO

Assumiamo che il campione aleatorio $X_1, X_2, \dots, X_n$ sia un campione normale con media (valore atteso) incognita e varianza nota.

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \qquad i = 1, \dots, n$$

μ → parametro incognito

σ^2 → parametro noto

2. FORMULAZIONE DELL'IPOTESI STATISTICA

Formuliamo l'**ipotesi nulla** come un'ipotesi sul valore puntuale del parametro incognito μ:

$$H_0: \mu = \mu_0$$

dove μ_0 è una costante.

Il test statistico tenterà di confutare H_0, ovvero tenterà di stabilire se ci sono sufficienti evidenze sperimentali per dire che H_0 con alta probabilità non è verificata e quindi accettare la cosiddetta **ipotesi alternativa** H_1:

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

3. DEFINIZIONE DELLA STATISTICA DEL TEST (1/2)

- Lo stimatore più naturale della media della distribuzione di un campione aleatorio è dato dalla **media campionaria** delle variabili aleatorie che costituiscono il campione, ovvero:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Sappiamo infatti che la media aritmetica di n realizzazioni di X, per n grande, tende a E[X].
- Pertanto, per n grande, $\bar{X}$ tenderà al valore atteso delle variabili X_i, ovvero μ.

3. DEFINIZIONE DELLA STATISTICA DEL TEST (2/2)

- Noi vogliamo determinare se μ è significativamente diverso dal valore μ_0 → la quantità che ci interessa valutare è:

$$Y = \bar{X} - \mu_0$$

- Infatti se Y è sufficientemente grande in valore assoluto, ovvero $\bar{X}$ è sufficientemente lontano da μ_0, potremo dire che è poco probabile che $\mu = \mu_0$ e quindi rifiutare H_0.
- Potremmo quindi considerare Y come statistica del nostro test.
- Tuttavia, per poter essere statistica del test, Y deve avere un requisito fondamentale: quando H_0 è vera, la distribuzione di Y deve essere completamente nota.
- Conosciamo la distribuzione di Y?

DISTRIBUZIONE DELLA STATISTICA DEL TEST (1/2)

Si può dimostrare che se X_i, i =1,…, n sono n variabili aleatorie normali, la loro somma è anch'essa una variabile aleatoria normale con media $n \cdot \mu$ e varianza $n \cdot \sigma^2$:

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2),\ V = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad V \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$$

Sappiamo inoltre che la trasformazione lineare di una variabile aleatoria normale è ancora una variabile aleatoria normale:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \qquad W = a \cdot X + b \quad \Rightarrow \quad W \sim N(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2)$$

Applicato al nostro caso significa che:

$$Y = \frac{1}{n} \cdot V - \mu_0, \quad V \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Y \sim N(\mu - \mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$$

DISTRIBUZIONE DELLA STATISTICA DEL TEST (2/2)

Se vale H_0: $\mu = \mu_0$ $\Rightarrow$ $Y \backsim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$

Poiché sappiamo calcolare le probabilità della normale standard, conviene riportarsi al caso di una variabile normale standard. Considereremo dunque come statistica del test la variabile aleatoria Z:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

sapendo che:

Se vale H_0: $\mu = \mu_0$ $\Rightarrow$ $Z \sim N(0,1)$ $\Rightarrow$ Completamente nota!

4. DEFINIZIONE DEL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA’

Il risultato di un qualsiasi test statistico può essere errato in 2 modi:

- Se si rifiuta H_0, quando invece H_0 è vera → errore di prima specie
- Se non si rifiuta H_0, quando H_0 è falsa → errore di seconda specie

Non vi è simmetria tra questi due tipi di errori.

Il test viene costruito in modo da porre un **limite stringente sull’errore di prima specie**, mentre si è molto più tolleranti sull’errore di seconda specie che di fatto non viene controllato.

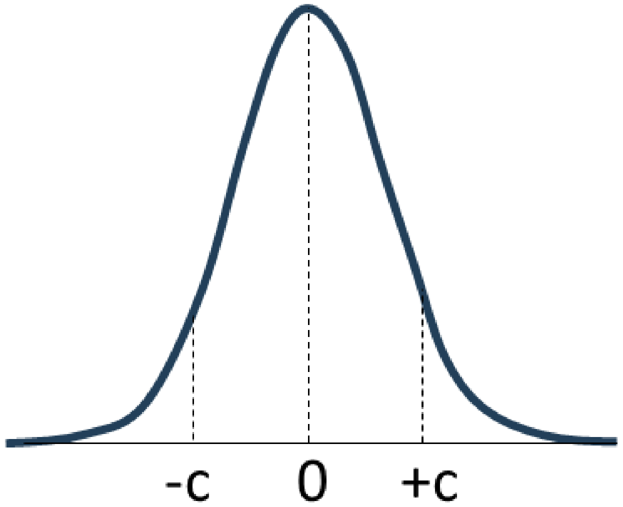
Ciò si ottiene definendo un **livello di significatività α**, tipicamente pari a 10%, 5% o 1%, e imponendo che le regione critica del test sia tale per cui l’errore di prima specie non possa superare α.

5. DEFINIZIONE DELLA REGIONE CRITICA (1/2)

Il nostro obiettivo è determinare se μ è significativamente diverso dal valore μ_0 → possiamo dunque definire la regione critica del test come:

$$R \coloneqq \{Z: |Z| > c\} \qquad Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ovvero rifiutiamo H_0 se $\bar{X}$ è troppo lontano da μ_0.



5. DEFINIZIONE DELLA REGIONE CRITICA (2/2)

Vogliamo che l'errore di prima specie sia α → c deve essere tale che la probabilità che $Z \in R$ quando vale H_0 sia α:

$$P(|Z| > c) = \alpha, \qquad Z \sim N(0,1)$$

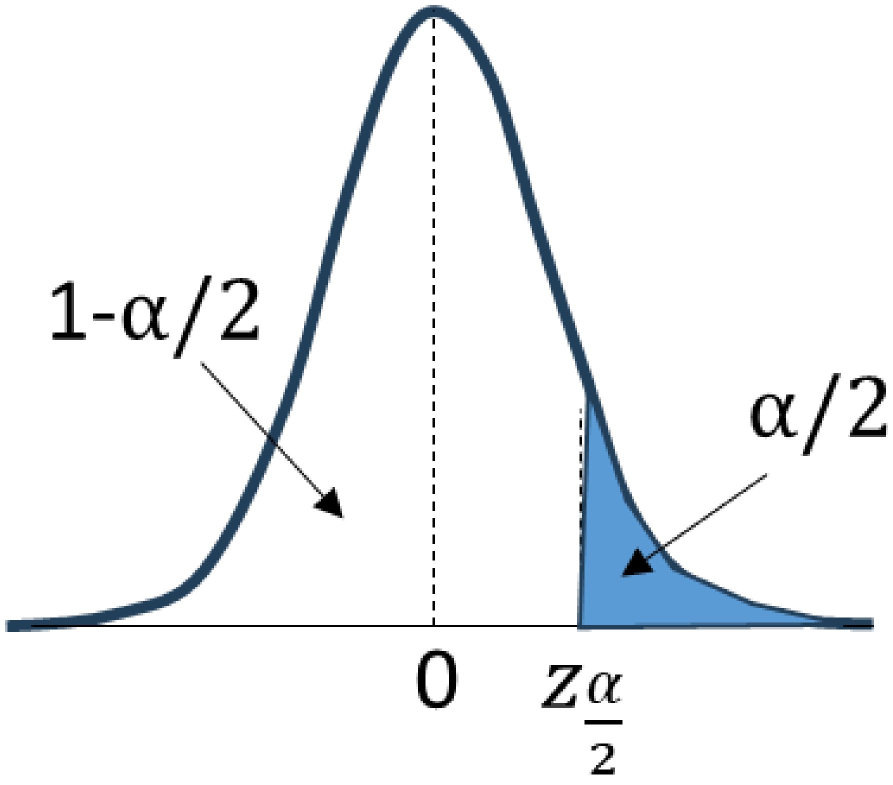
$$P(Z > c) + P(Z < -c) = \alpha$$

Per la simmetria della ddp normale:

$$2 \cdot P(Z > c) = \alpha$$

$$P(Z > c) = \frac{\alpha}{2}$$

$$c = z_{\alpha/2}$$



REGOLA DECISIONALE DEL TEST

Dunque fissato un certo livello di significatività α, l'esito del test è dato dalla seguente regola decisionale:

- Se $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2}$ → rifiuto H_0 (quindi accetto H_1)
- Se $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_{\alpha/2}$ → non posso rifiutare H_0 (quindi «accetto» H_0)

APPLICAZIONE DEL TEST STATISTICO

- Abbiamo visto come è possibile costruire un test statistico per la verifica di un ipotesi sul valore puntuale della media di una popolazione normale con varianza nota.
- Il processo di costruzione di un test statistico è in generale complesso (lo lasciamo fare agli statistici).
- Tipicamente noi bioingegneri applichiamo dei test statistici già esistenti.
- L'applicazione di un test statistico è in generale semplice.
- Vediamo come si applica il test statistico appena costruito.

APPLICAZIONE DEL TEST SULLA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE CON VARIANZA NOTA (1/2)

Abbiamo i dati di un campione statistico $x_1, x_2, \dots, x_n$ che ipotizziamo essere realizzazione di un campione aleatorio con media μ incognita.

Vogliamo applicare il test appena costruito per verificare l'ipotesi H_0: $\mu = \mu_0$. Dovremo eseguire i seguenti step.

1. Verifica della plausibilità delle assunzioni del test. Possiamo assumere ragionevolmente che i dati, $x_1, x_2, \dots, x_n$, provengono da una distribuzione normale? Se sì, ne conosciamo la varianza σ^2?
   - Esistono dei metodi per verificare se un campione è approssimativamente normale (vd. prossime lezioni).
   - Per ora ipotizziamo che le assunzioni siano ragionevolmente soddisfatte dai dati.
2. Fissiamo un livello di significatività. Per esempio α=5%.

APPLICAZIONE DEL TEST SULLA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE CON VARIANZA NOTA (2/2)

3. Calcoliamo il valore osservato della statistica del test a partire dai dati:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

4. Definiamo la regione critica. Calcoliamo $z_{\alpha/2}$ e definiamo R come:

$$R = \{Z: |Z| > z_{\alpha/2}\}$$

   - Se $\alpha=5\%$ → $z_{\alpha/2}=z_{0.025}\approx 1.96$ → R = {Z: |Z|>1.96}

5. Applichiamo la regola decisionale per prendere la decisione finale:
   - Se $|z| > z_{\alpha/2}$ → rifiuto H_0 (quindi accetto H_1)
   - Se $|z| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$ → non posso rifiutare H_0 (quindi «accetto» H_0)

INTERPRETAZIONE DEL RISULTATO FINALE

- **Se il test rifiuta H_0:**
  - Possiamo dire che il campione proviene da una popolazione avente **media μ significativamente diversa da μ_0.**
  - Infatti la media campionaria $\bar{x}$ risulta talmente diversa da μ_0 da rendere molto poco probabile l'ipotesi nulla.
  - La probabilità che questo esito sia sbagliato è pari ad α → in α % dei casi il test rifiuterà H_0 per puro caso → l'esito è un <u>falso positivo</u>.
- **Se il test non rifiuta H_0:**
  - Non ci sono sufficienti evidenze sperimentali per rifiutare H_0.
  - La media campionaria $\bar{x}$ non risulta abbastanza diversa da μ_0 per poter affermare in maniera abbastanza sicura che $\mu \neq \mu_0$.
  - **Non possiamo dire assolutamente nulla sul valore di μ.**

NOTA IMPORTANTE

- Quando un test statistico non rifiuta l'ipotesi nulla, e quindi la «accetta», in realtà l'ipotesi nulla e quella alternativa sono da considerarsi entrambe plausibili.
- Cercare di ricavare delle conclusioni sul valore dei parametri incogniti della distribuzione, quando H_0 non è rifiutata, è fondamentalmente sbagliato.

Immaginiamo che all'esame venga chiesto di applicare un test statistico per verificare l'ipotesi nulla H_0: $\mu = \mu_0$, e che il test dia esito negativo.
Se qualcuno scrive:

«accetto H_0, quindi posso concludere che $\mu = \mu_0$»

Questo viene considerato un errore grave!!!

ESERCIZIO

Si richiede che il modulo di elasticità di un certo tipo di fibra sintetica sia pari a 200 MPa. La nostra esperienza passata ci dice che la deviazione standard per questo genere di fibre è di 5 MPa. Per valutare l'idoneità delle fibre prodotte da una certa azienda, se ne analizza un campione di 8 esemplari. I valori del modulo di elasticità misurato per gli 8 esemplari sono:

201 195 197 198 194 202 196 193

Sulla base dei dati a disposizione, cosa possiamo concludere riguardo l'idoneità delle fibre prodotte dall'azienda, se utilizziamo un livello di significatività al 5%?

E se invece utilizziamo un livello di significatività pari al 10%?

SOLUZIONE (1/3)

- Assumiamo che i dati provengano da un campione aleatorio normale con media μ incognita e deviazione standard $\sigma = 5$ Mpa.
- Definiamo l'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa:
  - H_0: $\mu = 200$ MPa
  - H_1: $\mu \neq 200$ Mpa
- Calcoliamo il valore della statistica del test a partire dai nostri dati:
  - $\bar{x} = \frac{1}{8}(201+195+197+198+194+202+196+193)=197$
  - $z = \frac{\bar{x}-200}{5/\sqrt{8}} = -1.697$

SOLUZIONE (2/3)

- Con livello di significatività α=5%:
  - $z_{\alpha/2} = z_{0.025} \cong 1.96$
  - R={z: |z|>1.96}.
  - Nel nostro caso z = -1.697 → con α=5% **NON possiamo rifiutare l'ipotesi nulla.**

- Con un livello di significatività al 5%, non possiamo concludere che il modulo di elasticità medio delle fibre prodotte dall'azienda sia significativamente diverso dal valore desiderato di 200 MPa.
- Le fibre sono dunque accettabili? Non possiamo dirlo! Il modulo di elasticità medio delle fibre potrebbe essere vicino a quello desiderato per puro caso (in fondo abbiamo solo 8 campioni!)

SOLUZIONE (3/3)

- Con livello di significatività α=10%:
  - $z_{\alpha/2} = z_{0.05} \cong 1.645$
  - R={z: |z|>1.645}.
  - Nel nostro caso z = -1.697 → con α=10% **possiamo rifiutare l'ipotesi nulla.**

↓

- Con un livello di significatività al 10%, possiamo concludere che il modulo di elasticità medio delle fibre prodotte dall'azienda sia significativamente diverso dal valore desiderato di 200 MPa.
- Le fibre sono dunque accettabili? Possiamo dire di no, sapendo che la probabilità che ci stiamo sbagliando è del 10%.

SCELTA DEL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA'

- L'esito di un test statistico può differire semplicemente variando il livello di significatività.
  - Nell'esempio precedente, con α=5% non potevamo rifiutare H_0, mentre con α=10% abbiamo potuto rifiutare H_0.
- Il livello di significatività appropriato da usare nelle varie situazioni dipende di volta in volta dalle circostanze ed è influenzato da diversi fattori.
  - Se la decisione di rifiutare H_0 portasse ad un costo elevato, che risulterebbe quindi perso se H_0 fosse in realtà valida, potremmo decidere di usare un basso livello di significatività.

REGOLA DECISIONALE BASATA SUL P-VALUE (1/2)

La regola decisionale derivata per il test statistico appena visto è:

- Se $|z| > z_{\alpha/2}$ → rifiuto H_0 (quindi accetto H_1)
- Se $|z| \leq z_{\alpha/2}$ → non posso rifiutare H_0 (quindi «accetto» H_0)

dove z è il valore assunto dalla statistica del test Z.

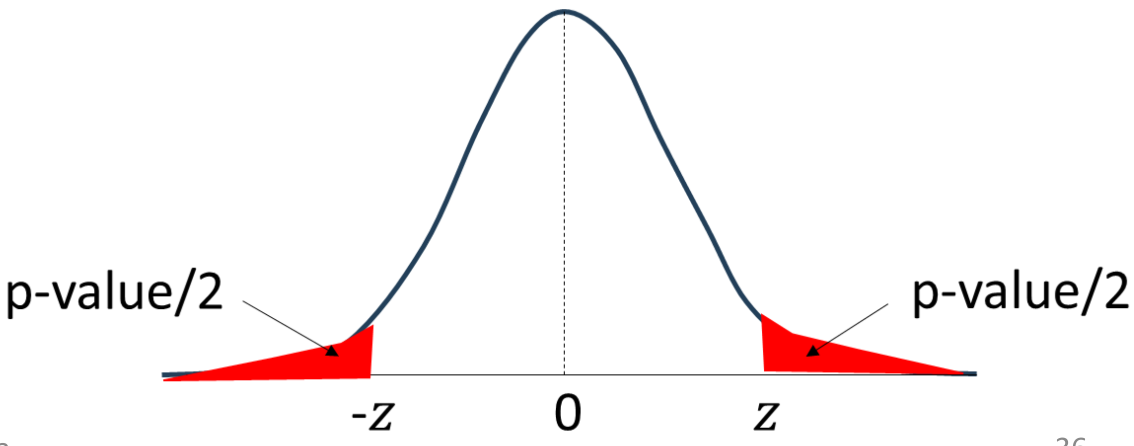
Formulazione alternativa della regola decisionale: calcoliamo il valore $p = P(|Z| > |z|)$ e lo confrontiamo con α.

Per il test statistico considerato: $p = 2 \cdot (1 - \Phi(z))$.

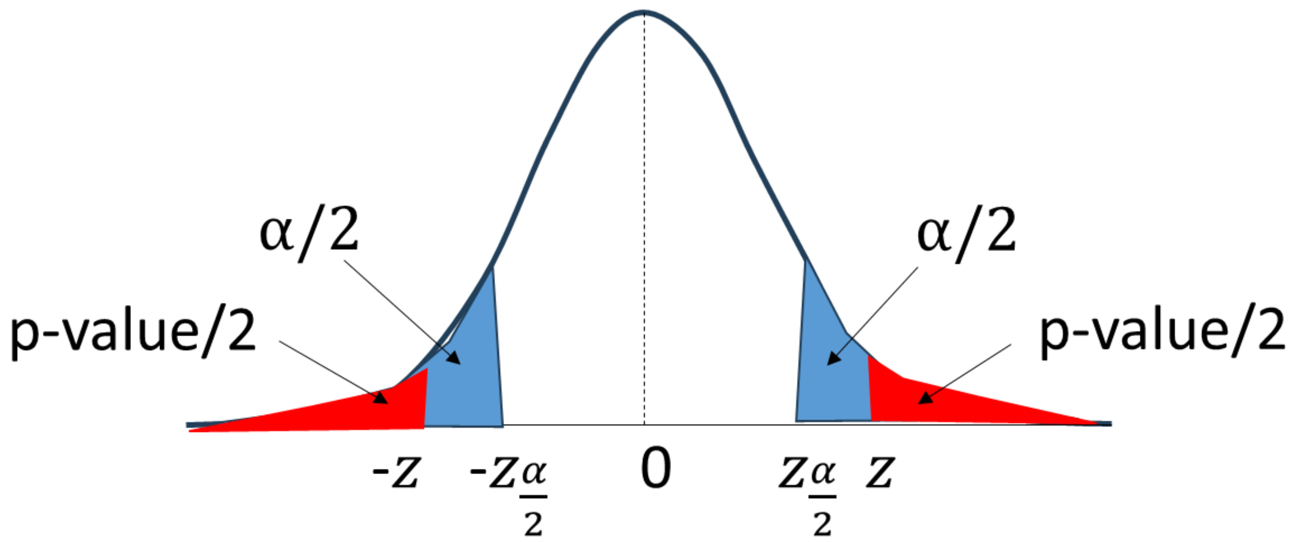
La regola decisionale quindi diventa:

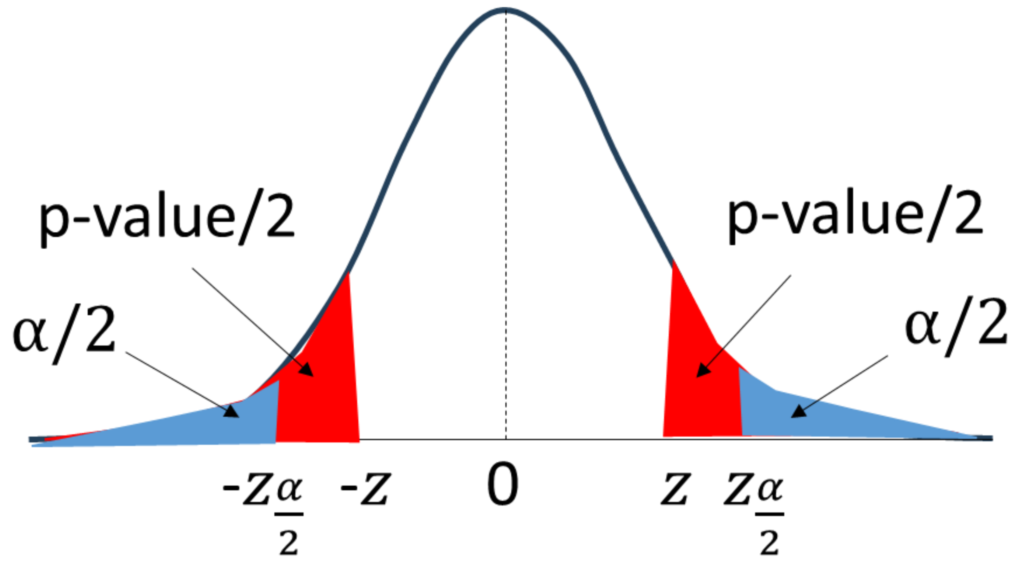
- Se $p < \alpha$ → H_0 è rifiutata
- Se $p \geq \alpha$ → non possiamo rifiutare H_0

Il valore p viene anche detto **p-value**.



REGOLA DECISIONALE BASATA SUL P-VALUE (2/2)





$|z| > z_{\alpha/2}$
o equivalentemente
$p - value < \alpha$

→ H_0 è rifiutata

$|z| < z_{\alpha/2}$
o equivalentemente
$p - value > \alpha$

→ Non si può rifiutare H_0

IL P-VALUE

Le funzioni che implementano i test statistici nei software di analisi statistica, generalmente restituiscono in uscita il **p-value** calcolato a partire dei dati.

Il p-value rappresenta la probabilità che la statistica del test assuma valori più estremi di quello osservato (quello calcolato a partire dai dati del campione).

Qualsiasi sia il test statistico che stiamo considerando, il p-value può essere utilizzato per decidere se rifiutare o meno H_0.

- Se p-value$< \alpha$ → H_0 è rifiutata
- Se p-value$\geq \alpha$ → non ci sono sufficienti elementi per rifiutare H_0

ROBUSTEZZA DEL TEST

- Il test statistico che abbiamo appena visto assume che il campione aleatorio sia normale. Solo grazie a questa assunzione possiamo conoscere esattamente la distribuzione della statistica del test.
- E se il campione non è normale?
  - Se il numero di dati a disposizione è grande, questo test fornisce risultati approssimativamente corretti anche quando il campione non è normale.
  - Infatti se il campione aleatorio non fosse normale, poiché le variabili aleatorie X_i che costituiscono il campione sono iid, il teorema del limite centrale ci garantisce che la loro somma sia approssimativamente una variabile aleatoria normale con media $n \cdot \mu$ e varianza $n \cdot \sigma^2$.
- Quando un test statistico fornisce un risultato approssimativamente corretto anche quando le sue ipotesi non sono soddisfatte (come in questo caso) si dice che il test è **robusto**.

TEST STATISTICO BILATERALE O A DUE CODE

- Il test che abbiamo appena costruito per verificare il sistema di ipotesi:

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

  è un esempio di **test bilaterale** o **a due code,** in quanto l'ipotesi alternativa H_1 è verificata quando μ è lontano da μ_0 in entrambe le direzioni possibili, (sia se μ è significativamente $>$ di μ_0, sia se μ è significativamente $<$ di μ_0).

- Nei test a due code, si rifiuta H_0 quando il valore della statistica del test cade in una delle due code della densità di Y data H_0.

TEST STATISTICO UNILATERALE O A UNA CODA

Assumiamo sempre che il nostro campione aleatorio sia normale con varianza nota σ^2 e media incognita μ. Supponiamo di essere interessati a capire se μ è significativamente maggiore di un certo valore μ_0.

Sistema di ipotesi:

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu > \mu_0$$

In questo caso il test si dice **unilaterale** o **a una coda**, perché l'ipotesi alternativa H_1 è verificata quando μ è lontano da μ_0 in una sola direzione possibile (in questo caso quando μ è significativamente maggiore di μ_0).

TEST STATISTICO UNILATERALE PER VERIFICA DI IPOTESI SULLA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE CON VARIANZA NOTA (1/2)

- Sistema di ipotesi:
  - $H_0 : \mu = \mu_0$
  - $H_1 : \mu > \mu_0$
- Anche in questo caso, come statistica del test ci occorre una variabile aleatoria che quantifichi la distanza di μ da μ_0. Possiamo usare la stessa statistica derivata per il test bilaterale:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

  che quando vale H_0 è distribuita come una normale standard.
- Questa volta però consideriamo come regione di rifiuto, quell'insieme di valori per cui Z è una quantità positiva sufficientemente grande.

TEST STATISTICO UNILATERALE PER VERIFICA DI IPOTESI SULLA MEDIA DI UNA POPOLAZIONE NORMALE CON VARIANZA NOTA (1/2)

- Regione di rifiuto:

$$R := \{Z: Z > c\}$$

→ rifiutiamo H_0 se $\bar{X}$ è tanto maggiore di μ_0.

- Vogliamo che il livello di significatività sia α → imponiamo che la probabilità di rifiutare H_0 quando H_0 è vera sia pari ad α:

$$P(Z > c) = \alpha, \qquad Z \sim N(0,1)$$

- Se vale H_0, c è il quantile gaussiano di probabilità α:

$$c = z_\alpha$$

- Regola decisionale del test:
  - Se $Z > z_\alpha$ → rifiutiamo H_0
  - Se $Z \leq z_\alpha$ → non possiamo rifiutare l'ipotesi H_0

COME SI APPLICA IL TEST?

Dato l'insieme di dati $x_1, x_2, \ldots, x_n$, immaginiamo di voler applicare il test appena visto per verificare il sistema di ipotesi: $H_0\colon \mu = \mu_0;\ H_1\colon \mu > \mu_0$.

1. Verifichiamo la plausibilità dell'assunzione di normalità e di conoscere σ^2.
2. Scegliamo un livello di significatività α.
3. Calcoliamo il valore della statistica del test per i nostri dati:
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$
4. Definiamo la regione critica:
$$R \coloneqq \{Z\colon Z > z_\alpha\}$$
5. Applichiamo la regola decisionale per eventualmente trarre un conclusione:
   - Se $\mathrm{z} > z_\alpha$ → rifiutiamo H_0 (possiamo dire che μ è significativamente maggiore di μ_0)
   - Se $\mathrm{z} \leq z_\alpha$ → non possiamo rifiutare l'ipotesi H_0 (non possiamo dire nulla su μ)

REGOLA DECISIONALE BASATA SUL P-VALUE

Anche in questo caso la regola decisionale può essere formulata sulla base del p-value.

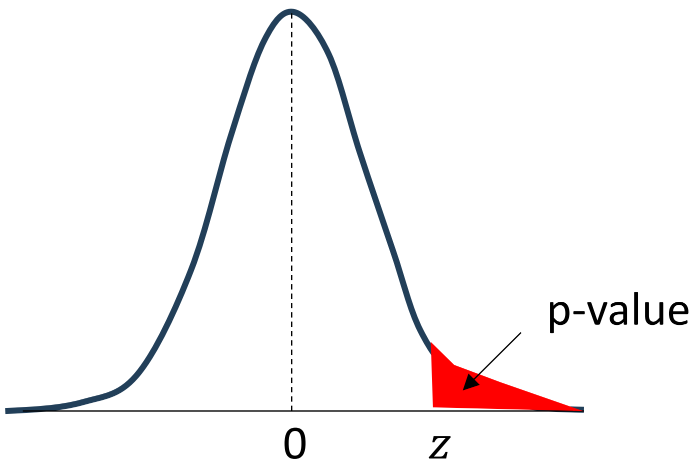
- Sia z il valore osservato per la statistica del test:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Definiamo il p-value come la probabilità che Z assuma valori maggiori di z:

$$p - value = P(Z > z)$$
$$p - value = 1 - \Phi(z)$$

- La regola decisionale diventa:
  - Se p-value$< \alpha$ → H_0 è rifiutata
  - Se p-value$\geq \alpha$ → non possiamo rifiutare H_0



OSSERVAZIONI (1/2)

- I test unilaterali si chiamano anche **ad una coda**, perché rifiutano H_0 quando il valore osservato per la statistica del test è su una sola delle code della sua densità quando vale H_0.
- Si può dimostrare che il test unilaterale che abbiamo appena visto per verificare il sistema di ipotesi $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu > \mu_0$ con livello di significatività α vale anche per verificare il sistema di ipotesi:
  - $H_0: \mu \leq \mu_0$
  - $H_1: \mu > \mu_0$

  con livello di significatività α.

OSSERVAZIONI (2/2)

- In maniera analoga a quanto fatto per costruire il test unilaterale appena visto, possiamo costruire un test unilaterale per verificare il sistema di ipotesi:
  - $H_0 : \mu = \mu_0$
  - $H_1 : \mu < \mu_0$

  o

  - $H_0 : \mu \geq \mu_0$
  - $H_1 : \mu < \mu_0$

  Regola decisionale:
  - Se $\mathrm{z} < -z_\alpha$ → rifiutiamo H_0 (possiamo dire che μ è significativamente minore di μ_0)
  - Se $\mathrm{z} \geq -z_\alpha$ → non possiamo rifiutare l'ipotesi H_0 (non possiamo dire nulla su μ)

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

  Regola decisionale basata sul p-value:

$$\mathrm{p-value} = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < z) = \Phi(z)$$

  - Se p-value$< \alpha$ → rifiutiamo H_0
  - Se p-value$\geq \alpha$ → non possiamo rifiutare H_0

ESERCIZIO

Si richiede che il modulo di elasticità di un certo tipo di fibra sintetica sia <u>almeno</u> pari a 200 MPa. La nostra esperienza passata ci dice che la deviazione standard per questo genere di fibre è di 5 MPa. Per valutare l'idoneità delle fibre prodotte da una certa azienda, se ne analizza un campione di 8 esemplari. I valori del modulo di elasticità misurato per gli 8 esemplari sono:

201 195 197 198 194 202 196 193

Sulla base dei dati a disposizione, possiamo concludere che le fibre prodotte dall'azienda <u>non sono idonee</u> utilizzando un livello di significatività al 5%?

SOLUZIONE

- Assumiamo che i dati provengano da un campione aleatorio normale con media μ incognita e deviazione standard $\sigma = 5$ Mpa.
- Sistema di ipotesi:
  - H_0: $\mu \geq 200$ MPa
  - H_1: $\mu < 200$ Mpa
- Calcoliamo il valore della statistica del test a partire dai dati:
  - $\bar{x} = \frac{1}{8}(201+195+197+198+194+202+196+193)=197$
  - $z = \frac{\bar{x}-200}{5/\sqrt{8}} = -1.697$
- Applichiamo la regola decisionale basata sul p-value:
  - $p - value = P(Z < z) = \Phi(z) = \Phi(-1.697) = 1 - \Phi(1.697) \cong 1 - 0.955 = 0.045$
  - p-value < 0.05 (ovvero il nostro livello di significatività) → **rifiutiamo H_0.** → concludiamo che le fibre non sono idonee in quanto il loro modulo di elasticità medio è significativamente < di 200 MPa