

Lezione 5

martedì 14 ottobre 2025 14:30

Come si potrà trovare dimensione e base di $U + W$?

Per costruire una base di $U + W$ ho bisogno di tutti i vettori di una base di U e anche di tutti i vettori di una base di W .

Sia $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ una base di U ($\dim U = r$)

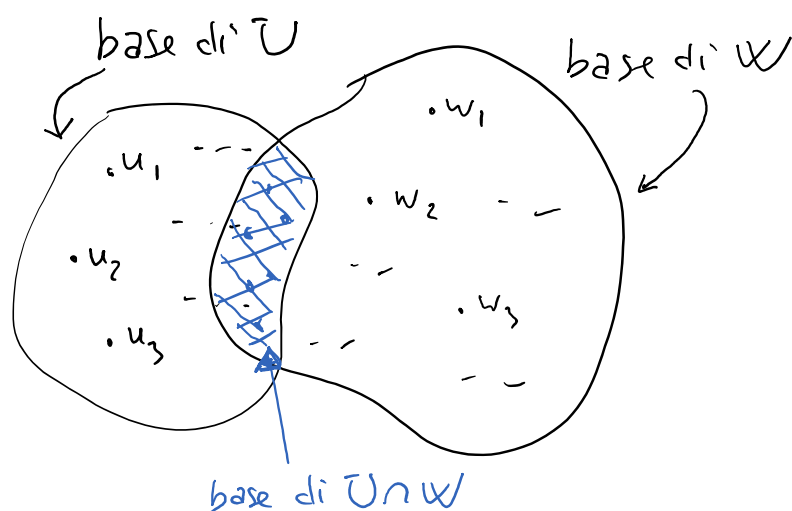
Sia $\{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ una base di W ($\dim W = s$)

Per $U + W$ prenderò $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s\}$

siamo sicuri che siano una base?

siamo sicuri che siano indipendenti? NO

in generale questi vettori possono essere dipendenti



Si può dimostrare che

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Formula di Grassmann

Esercizio. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^4$, U generato da

$$u_1 = (1, -1, 0, 2), \quad u_2 = (-1, -3, 2, 0), \quad u_3 = (2, 0, -1, 3)$$

(a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base di U .

(b) Trovare una base di

$$W: \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(c) Trovare basi di $U \cap W$ e di $U + W$.

(a) $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_1 \\ 0 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ -3\lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_3 \\ 0 \\ -\lambda_3 \\ 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leadsto \underbrace{\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0}_{\Downarrow}$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 - 2\lambda_3$$

$$\begin{cases} 2^a \text{ eq: } -\lambda_2 + 2\lambda_3 - 3\lambda_2 = 0 \\ 3^a \text{ eq: } 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 4^a \text{ eq: } 2\lambda_2 - 4\lambda_3 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda_3 = 2\lambda_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

ci sono ∞ sol.
per ogni λ_2

Se poniamo $\lambda_2 = 1$ si ha $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_1 = -3$

Verifica: $-3u_1 + u_2 + 2u_3 = \vec{0}$ OK

$$u_2 = 3u_1 - 2u_3$$

Cancello u_2 e tengo solo $\{u_1, u_3\}$

Bisogna controllare che u_1 e u_3 sono indipendenti.

Bisogna controllare che u_1 e u_3 sono indipendenti.

OK, u_1 e u_3 sono indipendenti, quindi sono una base di U e $\dim U = 2$.

$$(b) \quad W: \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

ci sono ∞ sol. che dipendono da 2 parametri

Quindi $\dim W = 2$.

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \\ x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

base di W

(c) Iniziamo da $U \cap W$

$$v \in U \cap W, \quad v \in U \text{ quindi } v = a_1 u_1 + a_3 u_3$$

$$v \in W \text{ quindi } v = b_1 w_1 + b_2 w_2$$

$$a_1 u_1 + a_3 u_3 = b_1 w_1 + b_2 w_2 \rightsquigarrow \text{sistema di 4 eq. con 4 incognite}$$

Metodo alternativo:

$$v \in U \cap W, \quad v \in U \text{ quindi } v = a_1 u_1 + a_3 u_3$$

$v \in W$ quindi v deve risolvere le eq. di W

$$v = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_3 \\ -a_1 \\ -a_3 \\ 2a_1 + 3a_3 \end{pmatrix}$$

sostituisco nelle eq. di W

Trovo un sistema di 2 eq. e 2 incognite

$$W: \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{a_1} + \cancel{2a_3} - \cancel{2a_3} + 2a_1 + 3a_3 = 0 \\ -a_1 - 2a_1 - 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 + 3a_3 = 0 \\ -3a_1 - 3a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -a_3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

ci sono ∞ soluzioni
per ogni $a_3 \in \mathbb{R}$

Quindi $\dim(U \cap W) = 1$.

Poniamo $a_3 = 1$, quindi $a_1 = -1$, quindi

$$v = -1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

base di $U \cap W$

$U + W$?

$$\dim(U + W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Quindi una base di $U + W$ è formata da 3 vettori.

$\{ u_1, u_3, w_1, w_2 \}$ sicuramente uno di questi vettori dipende dagli altri 3.

Cancello un vettore qualunque e tengo gli altri 3.

Bisogna verificare che i 3 vettori rimasti sono indipendenti.

Essi ...

Bisogna verificare che i 3 vettori rimanenti sono indipendenti:

Esempio: cancello u_3 e tengo $\{u_1, w_1, w_2\}$

Verifichiamo che sono linearmente indipendenti:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 w_1 + \lambda_3 w_3 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi i vettori u_1, w_1, w_3 sono indipendenti e quindi sono una base di $U + W$.