Esempio della lezione 6:

Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ abbiamo scritto $(A|\mathbb{I}_3)$

$$(A|\mathbb{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ abbiamo ridotto con Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$ quindi $rg\, A = 3$

Ora con operazioni $M_i(a)$ con $a \neq 0$ mettiamo tutti i pivot uguali a 1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$ ora partendo dall'ultimo pivot eliminiamo i coefficienti nei posti 1,3 e 2,3 con

operazioni $H_{i,j}(b)$ nel nostro caso $1°R + 3°R = H_{1,3}(1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$ quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Verifichiamo $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se $A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_3$ $\quad A^{-1}(A\,A^{-1}) = A^{-1}$

$A^{-1}A = \mathbb{I}_3$

Definizione: le seguenti matrici quadrate $M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dicono matrici elementari:

① S_{ij} è la matrice ottenuta dall'identità scambiando la riga i-esima con la j-esima.

Esempio: $n=3$ $i=1$ $j=3$ scambio 1°R con 3°R

$$S_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S_{ij} è invertibile con inversa S_{ij}

② $M_i(a)$ con $a \neq 0$ moltiplico la riga i-esima di $\mathbb{I}_n$ per il coefficiente $a \neq 0$

Esempio: $n=2$ $i=2$ $a=5$ $\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$M_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

L'inversa di $M_i(a)$ è $M_i(a^{-1})$

$$M_2(5)\, M_2\left(\frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $H_{i,j}(b)$ prendi $\mathbb{I}_n$ e somma alla riga i-esima la riga j-esima moltiplicata per b.

Esempio: $n=3$ $i=2$ $j=1$ $b=3$

$$\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H_{2,1}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$H_{i,j}(b)$ ha come inversa $H_{i,j}(-b)$

$$H_{2,1}(3)\, H_{2,1}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fatto:

$n=2$ $\quad M_2(8) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$M_2(8)\quad A=\begin{pmatrix}1&0\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\8c&8d\end{pmatrix}$$

Osservazione: se $A\in M_n(\mathbb{R})$ che può essere ridotta con operazioni elementari sulle righe all'identità.

$$(A \mid \mathbb{I}_3) \qquad E_1$$

$$E_1A \mid E_1 \qquad E_2$$

$$E_2E_1A \mid E_2E_1$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{(E_n\cdots E_1)A}_{=\ \mathbb{I}_3} \mid E_n\cdots E_2E_1$$

$$\mathbb{I}_3 \mid A^{-1}$$

Sottospazi Vettoriali:

$$a(v_1+v_2)=av_1+av_2$$

$$(a+b)v=av+bv$$

$$1\cdot v=v$$

Definizione: dato V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, un sottoinsieme $U\subseteq V$ si dice **sottospazio vettoriale** se

⓪ $\vec{0}\in U \qquad 0_V\in U$

① **Chiusura per la somma:** se $u_1,u_2\in U$ allora $u_1+u_2\in U$

② **Chiusura per prodotto per scalari:** se $u\in U$ e $a\in\mathbb{R}$ allora $au\in U$.

Esempi:

$\mathbb{R} = V$

(1) $U = \{0\}$

(0) $\vec{0} \in U$ sì ✓

(1) $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in U$ sì ✓

(2) $\vec{0} \in U \quad a \in \mathbb{R} \quad a \cdot \vec{0} = \vec{0} \in U$ sì ✓

(2) se $x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \qquad y = \frac{y}{x} \cdot x$

$\mathbb{R}$ è sottospazio di $\mathbb{R}$.

---

sottoinsieme

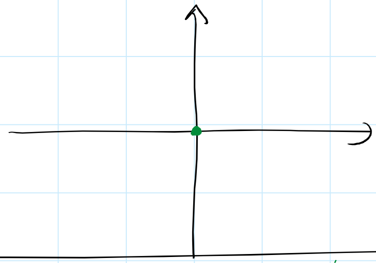
$U \subseteq V$

$V = \mathbb{R}^2$ $\quad$ U sottospazio di V si indica $U \leq V$

sottospazio

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ \vec{0} \} \leq \mathbb{R}^2$

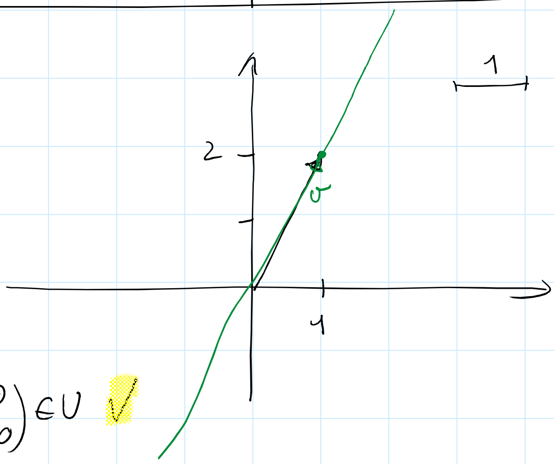
$a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$



Se $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad v \neq \vec{0}$

Es:

$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathbb{R}^2$



Verificare che U è sottospazio:

(0) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ con $a = 0$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \in U$ ✓

(1) $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \end{pmatrix}$ con $a_1 \in \mathbb{R}$

$u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$ con $a_2 \in \mathbb{R}$

✓

$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 + 2a_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2(a_1 + a_2) \end{pmatrix} \in U$ con coeff. $a = a_1 + a_2$

(2) $u = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$

prendiamo $b \in \mathbb{R}$ $\quad bu = b\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{ba} \\ 2\boxed{ba} \end{pmatrix} \in U$ sì ✓

$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| y = 2x \right\}$

Esempio: $\quad \mathbb{R}^2 \quad ax + by = 0$

$5x - 7y = 0$

$V = \mathbb{R}^2$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| 5x - 7y = 0 \right\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Dim:

⓪ Verifichiamo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ $\quad 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = 0$ ✓ sì

① Chiusura per la somma:

$u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in U$ cioè $\underline{5x_1 - 7y_1 = 0} \leftarrow$

$u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U$ cioè $\underline{5x_2 - 7y_2 = 0} \Leftarrow$

verifichiamo che $u_1 + u_2 \in U$ $\quad u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

$5(x_1 + x_2) - 7(y_1 + y_2) = 5x_1 + 5x_2 - 7y_1 - 7y_2 =$

$= (5x_1 - 7y_1) + (5x_2 - 7y_2) = 0 + 0 = 0$

$\quad\quad\uparrow \quad\quad\quad\quad \Uparrow$

③ Chiusura per prodotto per scalari:

$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$ $\quad \underline{5x - 7y = 0}$

$a \in \mathbb{R}$

Verifichiamo che $au \in U$ $\quad au = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$

$$5(ax)-7(ay) = a5x - a7y = a(5x-7y) = a\cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow av \in U$ sì ✓

Esercizio:

Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi.

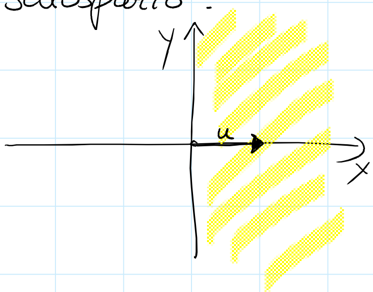
1) $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ è sottospazio?

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U \Longrightarrow U$ non è sottospazio.

2) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ x + y = 3 \right\}$ è sottospazio? No

perché $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$ Non è sottospazio.

3) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ x \geq 0 \right\}$ è sottospazio?



No perché non è chiuso per prodotto per scalari $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$

$a = -1 \qquad a\cdot u = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ x \geq 0 \right\}$ ⓪ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ sì $0 \geq 0$

① Chiusura per la somma $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in U \quad \underline{x_1 \geq 0}$

$u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U \quad \underline{x_2 \geq 0}$

$u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \qquad \underset{\overset{\vee}{0}}{x_1} + \underset{\overset{\vee}{0}}{x_2} \geq 0$

② Chiusura per prodotto per scalari

$u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in U$ $\qquad \underline{x\geq 0}$ $\qquad \underline{a\in\mathbb{R}}$

$au=\begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}$ è vero che $ax\geq 0$ $\qquad$ N $\qquad a=-1$ e $x\neq 0$

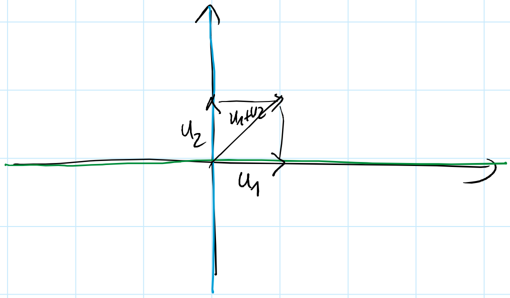
$\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}\in U$ $\qquad a=-1$

$-1\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\8\end{pmatrix}\notin U$

$$U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy=0\right\}$$

se $x=0$

se $y=0$



⓪ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in U$ sì $0\cdot 0=0$ ✓

① Chiusura per la somma: $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in U$ $\quad 1\cdot 0=0$

$u_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in U$ $\quad 0\cdot 1=0$

ma $u_1+u_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\notin U$ perché $1\cdot 1\neq 0$

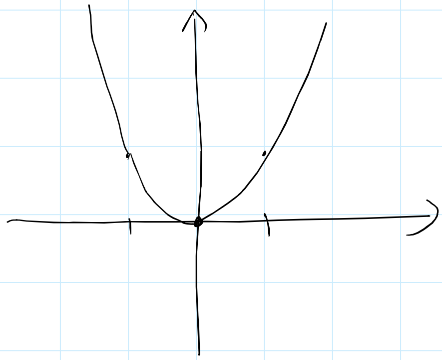
Sia $u_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\in U$ $\qquad \underline{x_1y_1=0}$ $\qquad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$u_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in U$ $\qquad \underline{\underline{x_2y_2=0}}$ $\qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$u_1+u_2=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$ appartiene a U?

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)=\cancel{x_1y_1}+\underset{0\ 0}{x_2y_1}+\underset{1\ 1}{x_1y_2}+\cancel{x_2y_2}$$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ y = x^2 \right\}$



$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U$

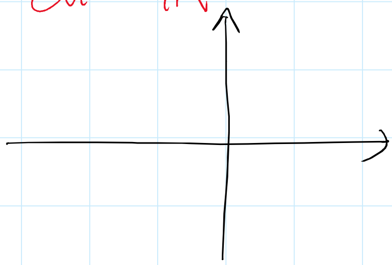
U U

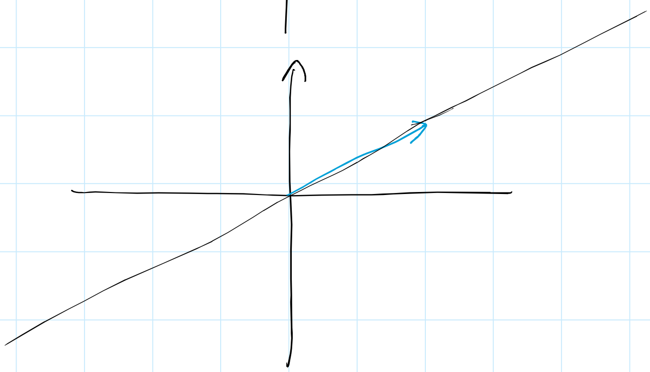
Non è chiuso per la somma.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U \qquad a = 2 \qquad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U$ non è chiuso per prodotto per scal.

Sottospazi di $\mathbb{R}^2$

i) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leq \mathbb{R}^2$





ii) $U = \{ a v \mid a \in \mathbb{R} \} \leq \mathbb{R}^2$

con $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

una retta per l'origine.

iii) $\mathbb{R}^2 \leq \mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^3$

Si consideri $U_k = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 2x - y = k \\ y + z = 0 \end{matrix} \right\}$ $\qquad 2 \cdot 0 - 0 = k$

$U_k \leq \mathbb{R}^3$ se e solo se $k = 0$.

Se $k \neq 0$ non è un sottospazio perché non contiene $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Definizione:

Dato uno spazio vettoriale V, $v_1, \dots, v_n$ vettori di V e $a_1, \dots, a_n$ numeri reali si dice **combinazione lineare** dei vettori $v_1, \dots, v_n$ con coefficienti $a_1, \dots, a_n$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

Osservazione:

Se $U \leq V$ allora U è chiuso per combinazioni lineari cioè dati $u_1, \dots, u_n \in U$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in U.$$