

Lezione 10

Numeri complessi

Problema: $X^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni.

Introduciamo il simbolo i con la proprietà che $i^2 = -1$. Allora i e $-i$ sono soluzioni di $X^2 = -1$.

Indico con $\mathbb{C}$ l'insieme

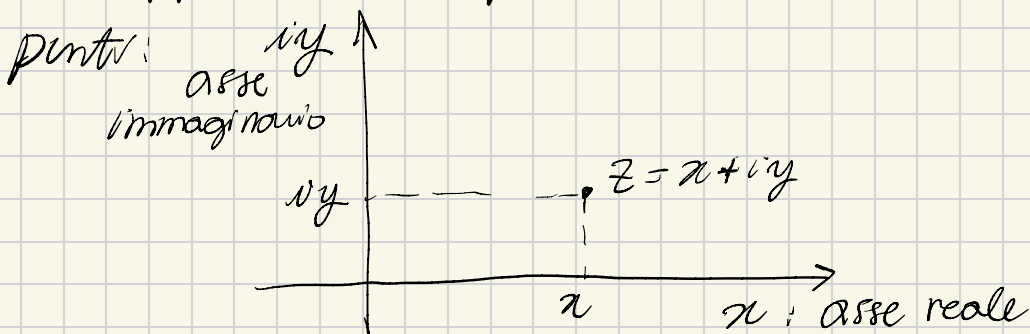
$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

numero
complesso

parte
reale
di z

parte immaginaria di z

Li rappresento nel piano cartesiano come



In questo modo identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$.

Operazioni

Somma di due numeri complessi

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R}$$

$$z_2 = a_2 + ib_2, \quad a_2, b_2 \in \mathbb{R}$$

$$z_1 + z_2 := a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2).$$

Oss: Se interpretiamo z_1 e z_2 come vettori del piano, questa è la regola del parallelogramma.

Prodotto di due numeri complessi

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &:= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &\stackrel{!}{=} a_1 a_2 + ib_1 a_2 + i a_1 b_2 + (ib_1) \cdot (ib_2) \\ &\stackrel{!}{=} a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2). \end{aligned}$$

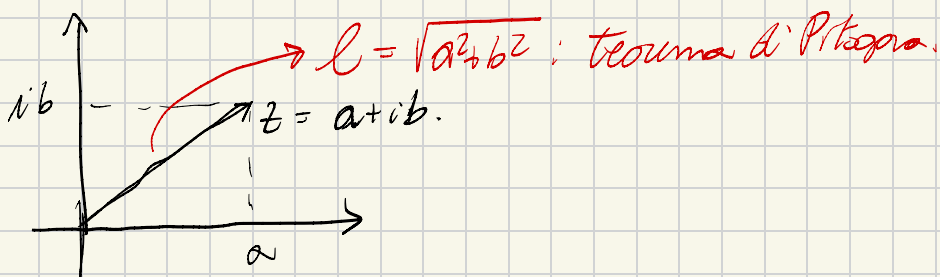
$(i)^2 \cdot b_1 b_2 = -b_1 b_2$

parte reale parte immaginaria

Modulo

$$|z| = |a+ib| = \|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Oss Se interpretato z come vettore del piano, questo è il modulo di un vettore.



Oss Per i numeri reali, vale che
 $|ab| = |a| \cdot |b|$.

Anche per i numeri complessi

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

(Esempio: verifica: $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$
dove controllare che $(z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1))$)

$$\underbrace{\sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2}}_{|z_1 \cdot z_2|} = \underbrace{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}_{|z_1|} \cdot \underbrace{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}_{|z_2|}$$

Oss

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$$a \mapsto a = a + 0 \cdot i$$

I numeri reali sono i numeri complessi con parte immaginaria nulla.

Oss Torniamo alle equazioni

In $\mathbb{R}$

$$X^2 = 4: \text{ due soluzioni } (\pm 2)$$

$$X^3 = 1 \text{ una soluzione}$$

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

No soluzioni
in $\mathbb{R}$

$$X^2 = -1: \text{ nessuna soluzione}$$

Oss $X^2 + X + 1 = 0$ non ha soluzioni

(2) $(X-1)^2 = 0$ dico che ha due soluzioni

In $\mathbb{C}$

Teorema fondamentale dell'algebra: Ogni

equazione polinomiale di grado n , a coefficienti in $\mathbb{C}$:

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = 0$$

$a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{C}$, ha esattamente n soluzioni, contate con la loro molteplicità

Esempio $X^2 = -1$ ha due soluzioni, che sono

Coincident, o anche
che 1 è soluzione
con multiplicità 2

$$i^{\circ} \text{ e } -i^{\circ},$$

Esercizio Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$
di $X^3 = 1$.

Svolgimento

$$X^3 = 1 \Rightarrow X^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (X-1)(X^2 + X + 1)$$

$X=1$ è soluzione (reale).

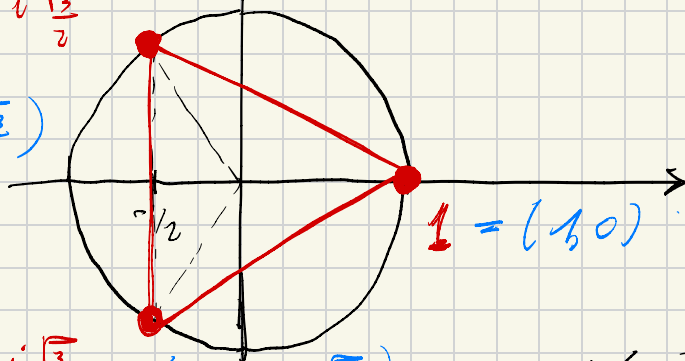
$$\begin{aligned} X^2 + X + 1 = 0 &\Rightarrow X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Soluzioni: $\left\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



$$1 = (1, 0)$$

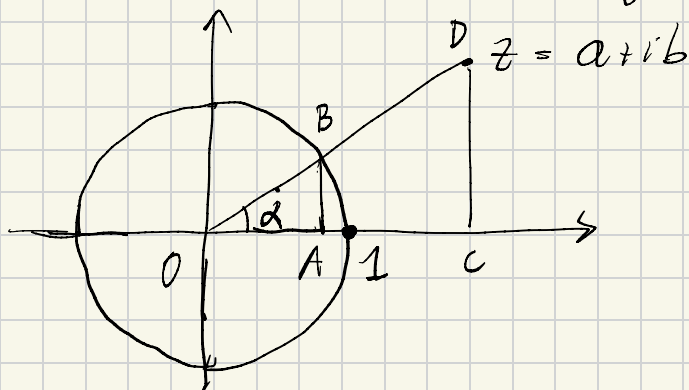
$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

Rosso: numeri di $\mathbb{C}$

Blu: vettori del piano conterraneo

Posso riscrivere le soluzioni in termini trigonometrici.

Oss Tutti i numeri complessi hanno una rappresentazione trigonometrica:



$$z = \|z\| \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)).$$

Qui: $\alpha \in [0, 2\pi)$ è l'angolo che il numero complesso z , interpretato come vettore di $\mathbb{R}^2$, forma con l'asse x .