

Lezione 9

Esercizio

Sia r la retta per $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, -2, 1)$
e sia s la retta di equazione

$$s: \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

(a) Parametriche e cartesiane di r e s .

Parametriche di r :

$$r: P + \lambda \overrightarrow{PQ} \quad (\overrightarrow{PQ} = Q - P)$$
$$r: (1, 0, 1) + \lambda (-1, -2, 0) \quad \begin{aligned} &= (0, -2, 1) - (1, 0, 1) \\ &= (-1, -2, 0) \end{aligned}$$

$$(x, y, z) = (1 - \lambda, -2\lambda, 1)$$

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{PARAMETRICHE DI } r.$$

Cartesiane di r : elimino λ dalle parametriche:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2(1 - \lambda) \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

(Verifico che $Q \in r: (0, -2, 1)$ deve soddisfare il sistema $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$, infatti: $\begin{cases} 0 + 2 - 1 = 0 \\ 1 = 1 \end{cases} \checkmark$)

Anteriori d's: già le ho

Parametriche d's: trovo due punti distinti in s , R, S , e $s: R + \lambda \overrightarrow{RS}$.

$$s: \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Sceglgo: $\left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = -2 \end{array} \right] \Rightarrow R = (2, 0, -2)$

$$R = (2, 0, -2)$$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow z = 2 \end{array} \right] \Rightarrow S = (0, 2, 2)$

Scelta arbitraria di x

Ricavo y dalla I equazione

Ricavo z dalla II equazione

Penso $\vec{RS} = S - R = (0, 2, 2) - (2, 0, -2) = (-2, 2, 4)$

$$S: (2, 0, -2) + \lambda(-2, 2, 4)$$

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = +2\lambda \\ z = -2 + 4\lambda \end{cases} \quad \text{PARAMETRICHE DI S.}$$

Se chiamo $t = -2\lambda$, posso riscrivere la retta come

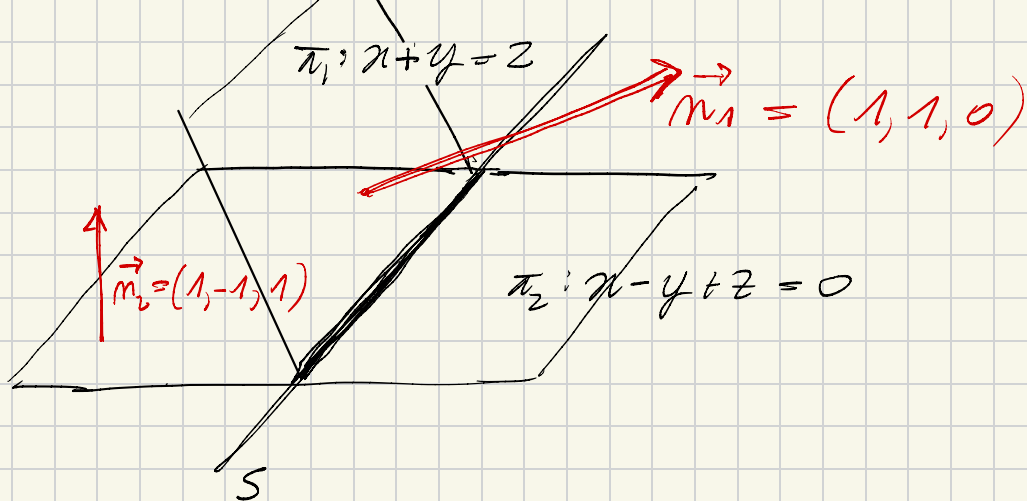
$$S: (2, 0, -2) + (-2\lambda)(1, -1, -2)$$

$$S: (2, 0, -2) + t(1, -1, -2)$$

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

Oss. Altro modo per trovare le equazioni parametriche di S:

$$S: \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$



Indico con $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ i vettori ortogonali alle rette S .

$\vec{n}_1$ = vettore perpendicolare a π_1

$\vec{n}_2$ = vettore perpendicolare a π_2 .

Poichè $S \subseteq \pi_1 \cap \pi_2$, S è perpendicolare sia a $\vec{n}_1$ che a $\vec{n}_2$.

Perciò, la direzione di S è $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, che è:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1, -1, -2) \quad] \text{ Verifico con il calcolo diretto. }$$

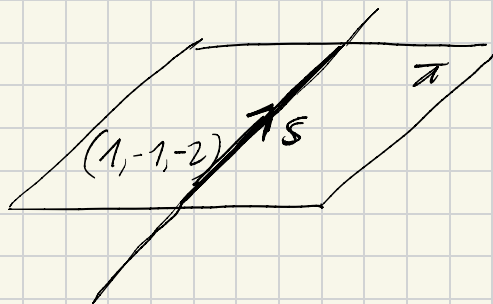
Però:

$$s: (2, 2, -2) + t(1, -1, -2).$$

determinato prima

(b) Trovare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e parallelo alla retta r .

$$\text{---} \xrightarrow{(1, 2, 0)} r \text{---}$$



Scego il punto $(0, 2, 2) \in s$. Allora

$$\pi: (0, 2, 2) + \lambda(1, 2, 0) + \mu(1, -1, -2).$$

PARAMETRICHE

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 2 + 2\lambda - \mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases}$$

Sostituire λ
nella II e III eq.

CARTESIANE:

Ricavo λ dalla I eq.

$$\begin{cases} \lambda = x - \mu \\ y = 2 + 2(x - \mu) - \mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 + 2x - 3\mu \\ z = 2 - 2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 + 2x - 3\mu \\ \mu = \frac{2-z}{2} = 1 - \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Ricavo μ dalla III eq.

Sostituire nella II eq:

$$y = 2 + 2x - 3\left(1 - \frac{z}{2}\right)$$

$$y = 2 + 2x - 3 + \frac{3}{2}z$$

$$2x - y + \frac{3}{2}z - 1 = 0$$

$$\pi: 4x - 2y + 3z - 2 = 0$$

Oss Altro metodo per trovare il piano
per S parallelo a r .

Ricorda che $ax + by + cz + d = 0$, il vettore
 $\vec{n} = (a, b, c)$ è perpendicolare a due
vettori direttori di π . Quindi, poiché
il piano che cerchiamo è parallelo sia a
 S che a r , (a, b, c) è

$$\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$$

dove $\vec{v}_r$ = vettore direttore di $r = (1, 2, 0)$

$\vec{v}_s$ = vettore direttore di $S = (1, -1, -2)$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = (-4, 2, -3)$$

Per cui $\pi: -4x + 2y - 3z + d = 0$

per qualche d . Notare che in questo modo ho trovato tutti i piani paralleli a r che a s ,

Per determinare il piano che mi interessa, basta che imponga che questo piano generico parallelo a r e s

$$-4x + 2y - 3z + d = 0$$

passi per un pto di s , ad esempio $(0, 2, 2)$
Cioè:

$$-4 \cdot 0 + 4 - 6 + d = 0 \Rightarrow d = 2.$$

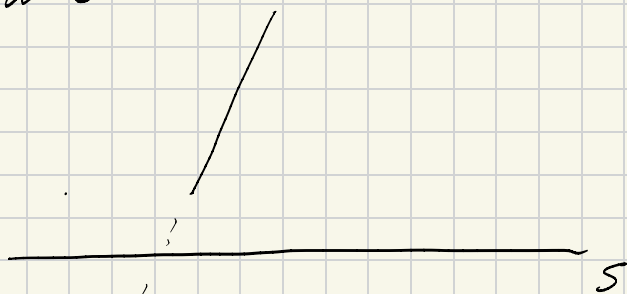
Il piano è

$$\pi: -4x + 2y - 3z + 2 = 0$$

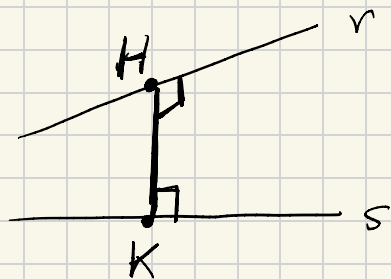
Oss. $4x - 2y + 3z - 2 = 0$ e $-4x + 2y - 3z + 2 = 0$

Sono lo stesso piano! posso moltiplicare un'equazione per una quantità non nulla senza cambiare l'equazione.

(c) Calcolare la distanza tra le rette r ed s .



r ed s sono due rette
seghembe: non sono parallele
e non sono complanari.

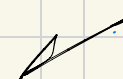


Devo trovare un segmento $\overrightarrow{HK}$ con $H \in r$,
 $K \in s$, in modo tale che $\overrightarrow{HK}$ sia
perpendicolare sia a r che a s .
Questo segmento $\overrightarrow{HK}$ è il vettore
di minima distanza tra r e s , cioè

il $\|\vec{HK}\|$ è minimo tra le lunghezze
di tutti i vettori che si ottengono
congiungendo un punto di r con un
punto di $s \rightarrow$ nel senso che il vettore $\vec{v} = B - A$
con $B \in s, A \in r$.

Facciamo:

pto di r : $(1+\lambda, 2\lambda, 1)$

pto di s : $(2+\mu, -\mu, -2-2\mu)$ 

diffenza tra un pto di s ed un pto di r
è il vettore generico:

$$(2+\mu, -\mu, -2-2\mu) - (1+\lambda, 2\lambda, 1) =$$

$$= (1+\mu-\lambda, -\mu-2\lambda, -3-2\mu).$$

Impongo che questo vettore sia ortogonale
sia a r che a s :

$$\begin{cases} (1+\mu-\lambda, -\mu-2\lambda, -3-2\mu) \cdot (1, 2, 0) = 0 \\ (1+\mu-\lambda, -\mu-2\lambda, -3-2\mu) \cdot (1, -1, -2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \mu - \lambda - 2\mu - 4\lambda = 0 \\ 1 + \mu - \lambda + \mu + 2\lambda + 6 + 4\mu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 5\lambda - \mu = 0 \Rightarrow \mu = 1 - 5\lambda \end{cases}$$

Sostituendo μ nella II eq:

$$1 + (1 - 5\lambda) - \lambda + (1 - 5\lambda) + 2\lambda + 6 + 4(1 - 5\lambda) = 0$$

$$1 + 1 - 5\lambda - \lambda + 1 - 5\lambda + 2\lambda + 6 + 4 - 20\lambda = 0$$

$$-29\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda = 13/29.$$

$$\begin{aligned} \mu &= 1 - 5\lambda = 1 - \frac{5 \cdot 13}{29} \\ &= \frac{29 - 65}{29} = -\frac{36}{29} \end{aligned}$$

$$\text{pt} \text{ su } r: \left(1 + \frac{13}{29}, \frac{26}{29}, 1 \right) = \left(\frac{42}{29}, \frac{26}{29}, 1 \right)$$

$$\text{pt} \text{ su } s: \left(2 - \frac{36}{29}, \frac{36}{29}, -2 + \frac{2 \cdot 36}{29} \right)$$

$$\left(\frac{58 - 36}{29}, \frac{36}{29}, \frac{-58 + 72}{29} \right) =$$

$$= \left(\frac{22}{29}, \frac{36}{29}, \frac{14}{29} \right)$$

$$\vec{v} = \text{pts of } s - \text{pts of } r$$

$$= \left(\frac{22-42}{29}, \frac{36-26}{29}, \frac{14-29}{29} \right)$$

$$= \left(\frac{-20}{29}, \frac{10}{29}, -\frac{15}{29} \right)$$

$$= \frac{5}{29} (-4, 2, -3)$$

$$\|\vec{v}\| = \frac{5}{29} \sqrt{16+4+9} = \frac{5}{29} \cdot \sqrt{29} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$$

Numeri complessi

Problema: Alcune equazioni in $\mathbb{R}$
non hanno soluzioni:

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni ($\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$)

Introduciamo un simbolo

i = unità immaginaria

con la proprietà che

$$i^2 = -1$$

Adesso, $x^2 + 1 = 0$ ha due soluzioni,
 i e $-i$.