Esercizio:

Esercizio 3. Al variare di k nei numeri reali si determinino le soluzioni del sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + (k+2)x_3 = k \\ 2x_1 - 2x_2 + (4-k)x_3 + (k^2+k-3)x_4 = k^2 - k \end{cases}$$

Svolgimento:

Passo 1: Scrivere la matrice completa associata al sistema lineare e la colonna delle incognite.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & k+2 & 0 & k \\ 2 & -2 & 4-k & k^2+k-3 & k^2-k \end{array}\right) \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Passo 2: ridurre con Gauss la matrice $(A|b)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{k} & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{k^2+k} & k^2 \end{array}\right)$$

Segnare i pivot indipendenti dal parametro (nel nostro caso è l'uno in posto 1,1 cerchiato in verde) e gli eventuali pivot che dipendono dal parametro; nel nostro caso li ho messi in un rettangolo arancione e sono k e k^2+k.

Passo 3: determinare i valori del parametro tali che i coefficienti evidenziati in arancione siano non nulli quindi pivot; nel nostro caso $\rightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2+k \neq 0 \end{cases}$ $k(k+1) \neq 0$ cioè $\boxed{\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}}$

e risolvere il sistema lineare per i valori trovati.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{k} & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{k^2+k} & k^2 \end{array}\right)$$

$A \mid b$

rg $A = 3$

rg$(A|b) = 3$

$$\left\{\begin{array}{l} (k^2+k)\, x_4 = k^2 \qquad x_4 = \dfrac{k^2}{\cancel{k}(k+1)} = \dfrac{k}{k+1} \\ k x_3 + x_4 = k \qquad \cancel{k}x_3 = \cancel{k} - \dfrac{\cancel{k}}{k+1} \\ x_3 = 1 - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k+\cancel{1}-\cancel{1}}{k+1} = \dfrac{k}{k+1} \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow \end{array}\right.$$

$$x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 = x_2 - 2\frac{k}{k+1} + \frac{k}{k+1} = x_2 - \frac{k}{k+1} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Per $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ $\quad Sol_{(A|b)} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - \frac{k}{k+1} \\ x_2 \\ \frac{k}{k+1} \\ \frac{k}{k+1} \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Sono infinite soluzioni dipendenti da un parametro x_2.

rg $A =$ rg$(A|b) = 3$ $\qquad$ n° parametri ind. delle soluzioni = n° incognite $-$ rg $A = 4 - 3 = 1$

n° incognite $= 4$

Passo 4: studiare separatamente i valori del parametro esclusi al passo 3.

$k = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{k} & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{k^2+k} & k^2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ridurre con Gauss

rg $A = 2 \neq$ rg$(A|b) = 3$ $\quad$ non ha soluzioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$ impossibile.

$$\boxed{\text{Per } k=-1 \quad Sol_{(A|b)} = \emptyset}$$

Per $k=0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{k} & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{k^2+k} & k^2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg A = 2 = rg(A|b)$

n° parametri = n° incognite $- rg A = 4-2=2$

$$\begin{cases} 0=0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1 = x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Per } k=0 \quad Sol_{A|b} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Osservazione:

Un sistema lineare può avere solo 3 tipi di soluzioni:

① $\emptyset$ sistema impossibile $\iff rg A \neq rg(A|b)$

② Ha un'unica soluzione $\iff rg A = rg(A|b)$
n° incognite $= rg(A)$

Es: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ $\quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$Sol_{A|b} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ 2z=2 \end{cases}$ $\quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

③ Ha infinite soluzioni $\iff rg A = rg A|b \quad n^\circ \text{incognite} > rgA$
dipendenti da n° parametri $= n^\circ$ incognite $- rgA$

Prodotto di matrici:

Prodotto righe per colonne.

$$(a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

$$M_{1,\boxed{n}}(\mathbb{R}) \times M_{\boxed{n},1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{1,1}(\mathbb{R})$$

Esempio: $(1 \quad 3 \quad 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1) + 3\cdot 1 + 2\cdot 4 = -1+3+8 = 10$

$$\begin{matrix} M_{1,\cancel{1}}(\mathbb{R}) & \times & M_{\cancel{1},1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{1,1}(\mathbb{R}) \\ (a) & & (b) & & (ab) \end{matrix}$$

Esempio:

$$\begin{matrix} A & & B & & C & \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} & = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} \\ M_{2,3}(\mathbb{R}) & & M_{3,2}(\mathbb{R}) & & M_{2,2}(\mathbb{R}) & \end{matrix}$$

$$c_{11} = (1\ 3\ 0)\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = -1+6+0 = 5$$

$$c_{12} = (1\ 3\ 0)\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = 0+6+0 = 6$$

$$c_{21} = (2\ 1\ 1)\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = -\cancel{2}+\cancel{2}+1$$

$$c_{22} = (2\ 1\ 1)\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} = 0+2+3 = 5$$

Osservazione: non è commutativo

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\2 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix}-1 & 0\\2 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1 & -3 & 0\\6 & 8 & 2\\7 & 6 & 3\end{pmatrix}}$$

$$3,\cancel{2} \qquad \cancel{2},3 \qquad 3,3$$

$$AB \neq BA$$

Definizione: date due matrici

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ allora

$$AB \in M_{m,p}(\mathbb{R})$$

$$m,\cancel{n} \quad \cancel{n},p$$

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

Domande:

$3 \times \cancel{2}$ $\quad$ $\cancel{2} \times 5$ $\quad$ 3×5

2×5 $\quad$ 3×2 $\quad$ NO

Definizione: una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice *invertibile* se esiste una matrice $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che

$$\boxed{AB = BA = \mathbb{I}_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B viene detta l'inversa di A

$$B = A^{-1}$$

Esempi: $\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbb{I}_2 \cdot \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$A \cdot \mathbb{I}_2 = A$ $\qquad$ verificate che $\mathbb{I}_2 \cdot A = A$.

Matrici scalari:

In $M_{n,n}(\mathbb{R})$ $\quad a\mathbb{I}_n$ con $a \in \mathbb{R}$ vengono dette <u>matrici scalari</u>.

Esempio: $n = 2 \quad a = 3 \qquad 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = C$

Se $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$CA = AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 3A$$

$$3 \mathbb{I}_3 A = 3A$$

$$C \cdot C^{-1} = \mathbb{I}_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione: se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($a \neq 0$) la matrice $a\mathbb{I}_n$ è invertibile con inversa $a^{-1}\mathbb{I}_n$

Matrici inverse di matrici 2x2:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se $ad - bc \neq 0$ e l'inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{ad-bc} \left(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & \underbrace{\cancel{bd} - \cancel{bd}}_{0} \\ \underbrace{-\cancel{ac} + \cancel{ac}}_{0} & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

Proposizione: se $C, S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertibili allora il prodotto SC è invertibile con inversa $C^{-1}S^{-1}$.

Dimostrazione:

$$C^{-1}\underbrace{\cancel{S^{-1}}\cancel{S}}_{\mathbb{I}_n}C = C^{-1}\mathbb{I}_n C = C^{-1}C = \mathbb{I}_n$$

quindi $(SC)^{-1} = C^{-1}S^{-1}$

l'inversa del prodotto SC è il prodotto delle inverse cambiate di ordine $C^{-1}S^{-1}$

$$S\cancel{C}\,\cancel{C^{-1}}S^{-1} = SS^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Analogamente

$(kSC)^{-1} = C^{-1}S^{-1}k^{-1}$ perché

$$C^{-1}S^{-1}\cancel{k^{-1}}\cancel{k}SC = \mathbb{I}_n.$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \mid \mathbb{I}_3$

$\mathbb{I}_3 \mid A^{-1}$

Riduciamo con Gauss

$$\begin{array}{c} 1^\circ R \\ 2^\circ R \\ 3^\circ R \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 3^\circ R \\ 1^\circ R \\ 2^\circ R \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3^\circ R + 2 \cdot 1^\circ R]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3^\circ - 3\cdot 2^\circ]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}\, 3^\circ \mathrm{r}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{1^\circ + 3^\circ}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}$$

$$A A^{-1} = \mathbb{I}_3$$