Definizione: data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si dicono operazioni elementari sulle righe di A le seguenti tre operazioni:

1. Scambio della riga i-esima con la j-esima
$S_{i,j}$ Esempio: $S_{1,3}$ $S_{3,1}$ scambio la prima con la terza riga

2. Moltiplicare la riga i-esima per $a \in \mathbb{R}$ $\boxed{a \neq 0}$
$M_i(a)$ Esempio: $M_3(8)$ = moltiplicare la terza riga per 8

3. Sommare alla riga i-esima b volte la riga j-esima con $b \in \mathbb{R}$

Esempio:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & 1 & -2 & 1 \\ \boxed{5} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1°R \\ 2°R \\ 3°R \end{array}$$

$H_{i,j}(b)$

applichiamo ad A $H_{2,1}(-3) =$ $\begin{array}{l} 1°R \\ 2°R + (-3)1°R \\ 3°R \end{array}$

$$\begin{array}{l} 1°R \\ 2°R \\ 3°R \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ \boxed{5} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$H_{3,1}(-5)$

$$\begin{array}{l} 1°R \\ 2°R \\ 3°R - 5 \cdot 1°R \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 1°R \\ 2°R \\ 3°R - 2 \cdot 2°R \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$0 - 2 \cdot (-2)$

1
5

$5 - 5 \cdot 1$

5
1

$1 - \frac{1}{5} \cdot 5$

Metodo di Riduzione di Gauss.

Ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si può ridurre con operazioni elementari sulle righe ad una matrice in forma a scala.

Algoritmo:

Passo 1: individuare la prima colonna (da sx verso dx) non nulla.

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Selezionare un coefficiente non nullo in questa colonna il "più semplice possibile" con uno scambio lo portiamo in prima riga.

Es: $S_{1,3}$ $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1°R \\ 2°R \\ 3°R \end{array}$

Passo 2: Con operazioni elementari del terzo tipo $H_{i,j}(b)$ elimina i coefficienti sotto il pivot della prima riga

$\boxed{\underset{2°R}{3} + b\underset{1°R}{1} = 0}$ $b = -3$

$H_{2,1}(-3)$ $\begin{array}{l} 1°R \\ 2°R - 3 \cdot 1°R \\ 3°R \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0-3\cdot 0 & 3-3\cdot 1 & 2-3\cdot 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}}$

Passo 3: Tieni fissa la prima riga e riparti dal passo 1 considerando la matrice ottenuta "cancellando" la prima riga.

S Esempio : $S_{2,3}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix}$

$-4 + b2 = 0 \quad b = 2$

$\begin{array}{l} 1°R \\ 2°R \\ 3°+2\cdot 2°R \end{array} \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Dopo un numero finito di passi l'algoritmo ha fine.

Oss:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} 1^\circ R \\ \frac{1}{2} 2^\circ R \\ -\frac{1}{4} 3^\circ R \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{3^\circ - 2^\circ} \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Esempio:
$$\begin{array}{c} 1^\circ R \\ 2^\circ R \end{array} \begin{pmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \frac{1}{11} 1^\circ R \\ \frac{1}{3} 2^\circ R \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2° Riga $- 1^\circ$ riga

Osservazione: data $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ in forma a scala

esempio 2×3 $\qquad\qquad$ 3×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = rK(A)$ $\qquad$ rank

$rg(A) \leq m$ perché ha m righe

$rg(A) \leq n$ perché ogni colonna ha al più un pivot.

$$rg(A) \leq \min\{m, n\}$$

Osservazione:

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{2^\circ + b 1^\circ}{\overset{2^\circ - b 1^\circ}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

②

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 27 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 27 & 0 \\ \boxed{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 27 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_{1,4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 27 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite $x_1, \dots, x_n$ con coefficienti reali è:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

associamo una matrice in $M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrice incompleta associata al sistema lineare

$$b = \vec{b} = \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

colonna dei termini noti
$\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdots & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matrice completa associata al sistema lineare.

$$Ax = b \qquad x = \vec{x} = \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

colonna delle incognite

$$Sol_{(A|b)} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; Ax = b \right\}$$

Esempio:

Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} -x+y=1 \\ y+z=5 \\ x+2y-2z=-1 \end{cases}$$

nelle incognite $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

① Scrivere la matrice completa

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ \boxed{1} & 2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

② Riduciamo con Gauss $A|b$

$1 + x(-1) = 0 \qquad 1 - x = 0 \qquad x = 1$

$$\begin{array}{l} 1^\circ R \\ 2^\circ R \\ 3^\circ R + 1^\circ R \\ 3^\circ R + x\,1^\circ R \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$3 + x1 = 0 \qquad x = -3$

$$\begin{array}{l} 1^\circ R \\ 2^\circ R \\ 3^\circ R - 3 \cdot 2^\circ R \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0-3\cdot 5 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

$-2-3\cdot 1$

$$\begin{cases} -5z = -15 \\ y + z = 5 \\ -x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \frac{15}{5} = 3 \\ y = 5 - z = 5 - 3 = 2 \\ x = y - 1 = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

$x - y = -1$

$$\boxed{Sol_{A|b} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sistemi con parametro:

Esercizio 3. Al variare di k nei numeri reali si determinino le soluzioni del sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + (k+2)x_3 = k \\ 2x_1 - 2x_2 + (4-k)x_3 + (k^2+k-3)x_4 = k^2 - k \end{cases}$$

$K \in \mathbb{R}$

1

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \boxed{A|b} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & K+2 & 0 & K \\ \boxed{2} & -2 & 4-K & K^2+K-3 & K^2-K \end{array}\right)$$

2 Ridurre con Gauss

$$
\begin{array}{l}
1^\circ R \\
2^\circ R - 1^\circ R \\
3^\circ R - 2 \cdot 1^\circ R
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & K & 1 & K \\
0 & 0 & 4-K-2(2) & K^2+K-3-2(-1) & K^2-K-2(0)
\end{array}\right)
$$

$\cancel{4}-K-\cancel{4}$ $\quad K^2+K-3+2$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & K & 1 & K \\
0 & 0 & -K & K^2+K-1 & K^2-K
\end{array}\right)
$$

$2^\circ + 3$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{K} & 1 & K \\
0 & 0 & 0 & \boxed{K^2+K} & K^2
\end{array}\right)
$$

$K^2+K = K(K+1) = 0$

Se $K \neq 0$

$K \neq -1$