

Lezione 4

giovedì 9 ottobre 2025 14:30

Intersezione e unione di sottospazi vettoriali.

(1) Se U e W sono sottospazi vettoriali di V è vero che $U \cap W$ è sottospazio vettoriale di V ?

(2) idem per $U \cup W$?

Teorema L'intersezione di sottospazi vettoriali di V è sempre un sottospazio vettoriale di V

Dim. $U, W \subset V$

$$v, w \in U \cap W \quad ? \quad v+w \in U \cap W$$

$\Downarrow$

$$\left. \begin{array}{l} v \in U \text{ e } w \in U \Rightarrow v+w \in U \\ v \in W \text{ e } w \in W \Rightarrow v+w \in W \end{array} \right\} \Rightarrow v+w \in U \cap W \quad \underline{\text{OK}}$$

Se λ è uno scalare e $v \in U \cap W$, cioè $v \in U$ e $v \in W$, si ha $\lambda v \in U$ e $\lambda v \in W$, quindi $\lambda v \in U \cap W$.

L'unione $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale! OK

Esempio: $U = \{ (a, 0) \mid a \in \mathbb{R} \}$

$$W = \{ (0, b) \mid b \in \mathbb{R} \}$$

$$(1, 0) \in U \text{ e } (0, 1) \in W \text{ ma}$$

$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ e questo vettore non appartiene a U e nemmeno a W .

Dato che $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale,

si definisce

$$U + W = \{ u + w \mid u \in U, w \in W \}$$

La somma $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Def. La somma di U e W si dice diretta se

$$U \cap W = \{ \vec{0} \}.$$

Scriveremo $U \oplus W$ per indicare che la somma è diretta.

Teorema. Se la somma di U e W è diretta (cioè $U \cap W = \{ \vec{0} \}$) allora la scrittura di un vettore nella forma $u + w$ è unica.

Dim. $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ tali che

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2$$

voglio dimostrare che $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$!!

$$\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$$

$$\Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W$$

$\Downarrow$

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = \vec{0}$$

$$u_1 = u_2 \text{ e } w_1 = w_2 \quad \square$$

Esempi (1) $\mathbb{R}^2$, $U = \{ (a, 0) \mid \forall a \}$
 $W = \{ (0, b) \mid \forall b \}$

U e W sono in somma diretta?

Bisogna verificare se $U \cap W = \{ (0, 0) \}$ (ovvio per come sono definiti U e W)

sono definiti
 $\bar{U}$ e $\mathcal{W}$).

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}}_u + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}}_w, \text{ con } u \in \bar{U} \text{ e } w \in \mathcal{W}$$

Quindi $\bar{U}$ e $\mathcal{W}$ sono in
 somma diretta.

$$(2) \quad \mathbb{R}^3, \quad \bar{U} = \left\langle \overbrace{(1, 0, 1)}^{u_1}, \overbrace{(3, 3, 3)}^{u_2} \right\rangle$$

$$\mathcal{W} = \left\langle \underbrace{(0, 1, 1)}_{w_1}, \underbrace{(3, 4, 4)}_{w_2} \right\rangle$$

Troviamo $\bar{U} \cap \mathcal{W}$.

Cerco $v \in \bar{U} \cap \mathcal{W}$, cioè

$$\begin{cases} v \in \bar{U}, & v = a_1 u_1 + a_2 u_2 \\ v \in \mathcal{W}, & v = b_1 w_1 + b_2 w_2 \end{cases}$$

$$\underbrace{a_1 u_1 + a_2 u_2}_{=} = \underbrace{b_1 w_1 + b_2 w_2}_{=}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + 3a_2 \\ 3a_2 \\ a_1 + 3a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_2 \\ b_1 + 4b_2 \\ b_1 + 4b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3b_2 - 3a_2 \\ b_1 = 3a_2 - 4b_2 \\ 3b_2 - 3a_2 + 3a_2 = 3a_2 - 4b_2 + 4b_2 \end{cases}$$

$$3b_2 = 3a_2 \Rightarrow b_2 = a_2$$

$$\begin{cases} b_2 = a_2 \\ a_1 = 3a_2 - 3a_2 = 0 \\ b_1 = 3a_2 - 4a_2 = -a_2 \end{cases}$$

ci sono ∞ soluzioni per ogni a_2

Si conclude che $\dim(\bar{U} \cap \mathcal{W}) = 1$, quindi una base
 di $\bar{U} \cap \mathcal{W}$ è formata da un solo vettore v !!

Poniamo $a_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, a_1 = 0, b_1 = -1$

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0 + 1u_2 = u_2 = (3, 3, 3)$$

$$\stackrel{!}{=} b_1 w_1 + b_2 w_2 = -w_1 + w_2 = (3, 3, 3) \quad \underline{\text{OK}}$$

Quindi $U \cap W = \langle (3, 3, 3) \rangle$ quindi la somma

$U + W$ **NON** è diretta.