

Lezione 8.

Esercizio

Sia r la retta

$$r: (1, 1, 1) + t(1, -1, 2)$$

e sia $P = (2, 1, 0)$.

Dopo aver verificato che $P \notin r$, trovare la proiezione ortogonale di P su r .

Svolgimento

Verifico che $P \notin r$.

Per farlo, trovo le caratteristiche di r .

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, -1, 2).$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow t = 1 - y$$

$$\begin{cases} x = 1 + (1-y) \\ z = 1 + 2(1-y) \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Verifico $P \notin r$: $P = (2, 1, 0)$

$$\begin{cases} 2 + 1 - 2 \neq 0 \Rightarrow P \notin r. \\ \longleftarrow \end{cases}$$

simbolo per "non esiste"

Equivalentemente, per mostrare che $P \notin r$ avrei potuto mostrare che $\nexists t$ tale che

$$P = (1+t, 1-t, 1+2t)$$

cioè: che il sistema

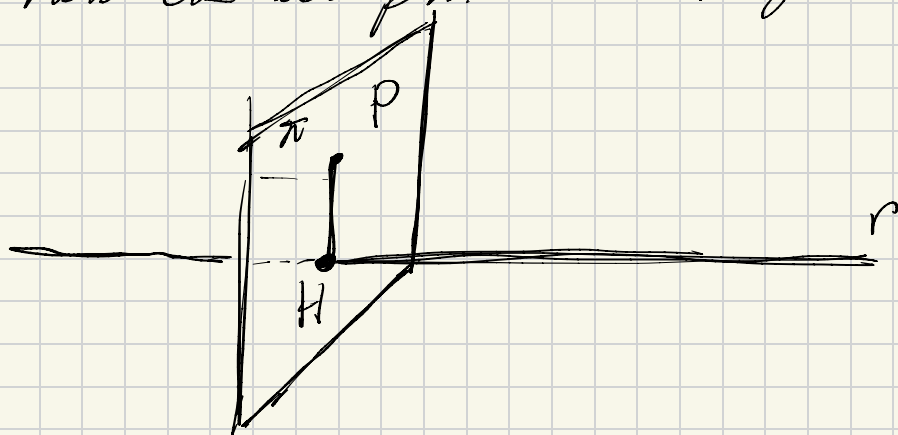
$$\begin{cases} 2 = 1+t \\ 1 = 1-t \\ 0 = 1+2t \end{cases}$$

non ha soluzione. Infatti:

$$\begin{cases} 2 = 1+t \Rightarrow t=1 \\ 1 = 1-t \Rightarrow t=0 \end{cases} \quad \text{No solution.}$$

oppure: le due equazioni non sono compatibili tra loro

Trovo ora la proiezione ortogonale:



H è l'intersezione tra r e il piano π ortogonale a r e passante per P .

Due passi:

Passo 1: Trovo π

Passo 2: Calcolo $\pi \cap r$

Passo 1. Trovo π .

Ricordo: se $ax+by+cz+d=0$ è un piano di $\mathbb{R}^3$, allora il vettore (a,b,c) è ortogonale al piano $ax+by+cz+d=0$.

Perciò un vettore direttore di r è $(1, -1, 2)$, allora il piano π deve essere

$$\pi: x - y + 2z + d = 0$$

per qualche d da determinare.

Trovo d imponendo che π passi per P , cioè che P soddisfi l'equazione di π ; poiché $P = (2, 1, 0)$, deve essere:

$$2 - 1 + 2 \cdot 0 + d = 0$$

$$d = -1.$$

Perciò, $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$.

Passo 2. Calcolo $\pi \cap r$.

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 2z - 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} x + (x + 2z - 1) - 2 = 0 \\ 2(x + 2z - 1) + z - 3 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2z - 3 = 0 \\ 2x + 4z - 2 + z - 3 = 0 \Rightarrow 2x + 5z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -x + \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5\left(-x + \frac{3}{2}\right) - 5 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5x + \frac{15}{2} - 5 = 0 \\ -3x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{5}{6} + \frac{4}{3} - 1 = \frac{5+8-6}{6} = \frac{7}{6} \\ z = -\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{3}{2} = \frac{-5+9}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ x = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$H = \left(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{2}{3}\right).$$

Vetore che He r:

$$\begin{cases} \frac{5}{6} + \frac{7}{6} - 2 = 0 & \checkmark \\ \frac{14}{6} + \frac{4}{6} - 3 & \checkmark \end{cases} \text{ du!}$$

Altra soluzione: imponi che $\vec{PX} = X - P$ per un punto $X \in r$ sia ortogonale al vettore direttore di r , $(1, -1, 2)$.

$$X = \text{pto generico di } r = (1+t, 1-t, 1+2t).$$

Calcolo $\vec{PX}$:

$$\begin{aligned} \vec{PX} = X - P &= (1+t, 1-t, 1+2t) - (2, 1, 0) \\ &\downarrow \\ &= (-1+t, -t, 1+2t). \end{aligned}$$

Impongo $\vec{PX}$ sia ortogonale a $(1, -1, 2)$

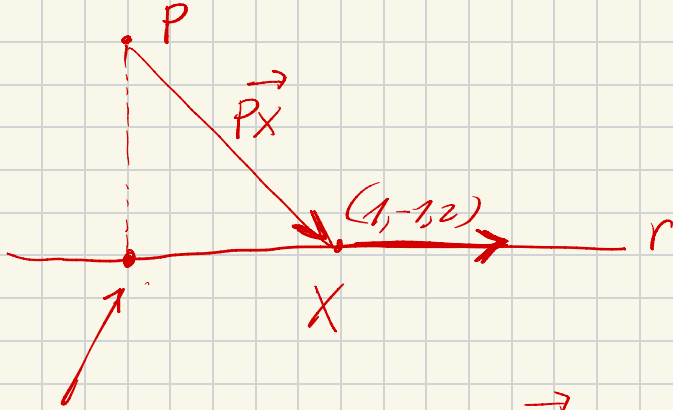
$$(-1+t, -t, 1+2t) \cdot (1, -1, 2) = 0$$

$$-1+t+t+2+4t=0$$

$$6t+1=0 \Rightarrow t = -1/6.$$

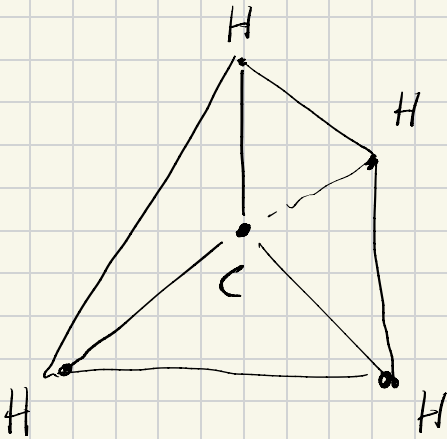
$$X = H = \left(1 - \frac{1}{6}, 1 + \frac{1}{6}, 1 - \frac{2}{6}\right)$$

$$\downarrow \\ = \left(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{2}{3}\right).$$

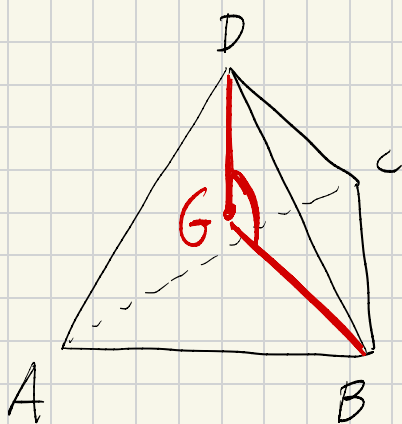


solo per $H = X$ il vettore $\vec{PX}$ è ortogonale
a $(1, -1, 2)$.

Esercizio Calcolare l'angolo della
molecola di metano

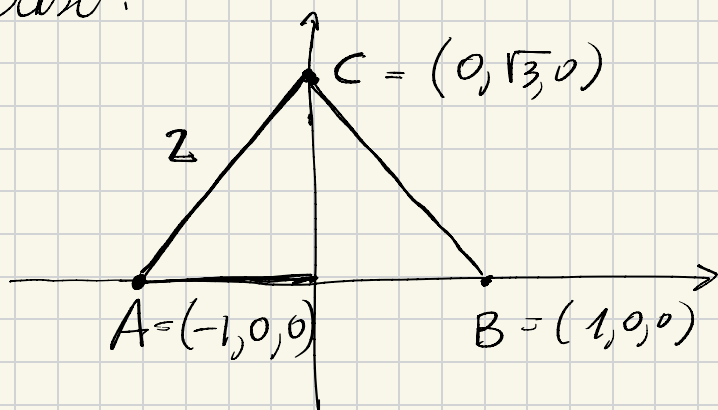


La molecola di metano forma un
tetraedro regolare con vertici gli atomi
di idrogeno.

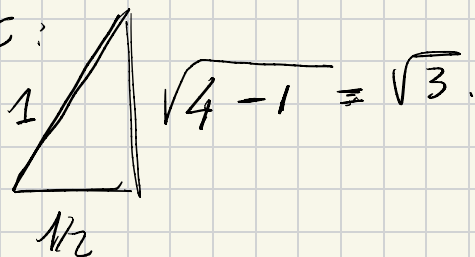


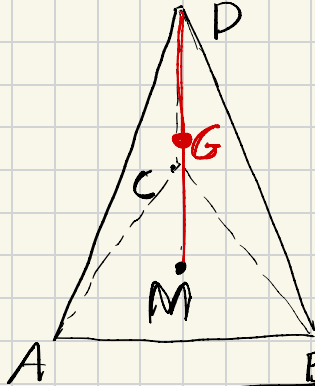
$G = \text{baricentro}$
del tetraedro:

Rappresento per comodit  il triangolo
di base:



Per calcolare C :





M = baricentro del
triangolo ABC

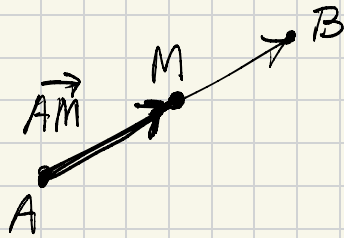
G = baricentro di A, B, C, D .

Per determinare G , trovo M , e da M trovo D .

Punto medio di un vettore $\vec{AB}$:

$$M = \frac{A+B}{2} \quad \text{cioè} \quad \vec{AM} = \frac{A+B}{2} - A = \frac{B-A}{2}$$

$$\text{Infatti: } M = A + \vec{AM} = A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}$$

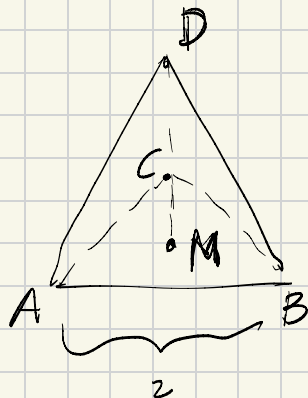
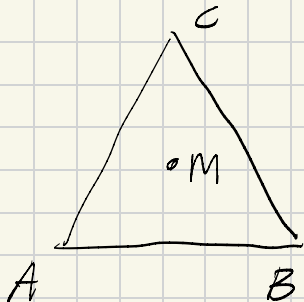


Baricentro di n punti:

$$M = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_n}{n}$$

Applico questa formula al nostro caso:

Determino M :



$$\begin{aligned}
 M &= \frac{A+B+C}{3} \\
 &= \frac{(-1, 0, 0) + (1, 0, 0) + (0, \sqrt{3}, 0)}{3} \\
 &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right).
 \end{aligned}$$

Determina ora D

Il punto D è del tipo

$$D = M + (0, 0, u) \quad , \text{ per qualche } u, \text{ che devo determinare.}$$

$$= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, u\right).$$

Sceglio D in modo tale che $\|\vec{CD}\| = 2$.

Ricordo $C = (0, \sqrt{3}, 0)$.

$$\begin{aligned}\vec{CD} = D - C &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, w\right) - (0, \sqrt{3}, 0) \\ &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}, w\right) \\ &= \left(0, -\frac{2}{3}\sqrt{3}, w\right).\end{aligned}$$

Impongo: $\|\vec{CD}\| = 2$, cioè $\|\vec{CD}\|^2 = 4$, cioè

$$\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + w^2 = 4$$

$$\frac{4 \cdot 3}{9} + w^2 = 4 \Rightarrow w^2 = 4 - \frac{12}{9}$$

$$w^2 = \frac{36 - 12}{9}$$

$$w^2 = \frac{24}{9}$$

$$w^2 = \frac{8}{3}$$

$$w = \pm \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Selezio $w > 0$ (voglio il tetraedro sopra e non sotto al piano Oxy).

$$\begin{aligned}\text{Però } D &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, w\right) \\ &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\end{aligned}$$

$$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

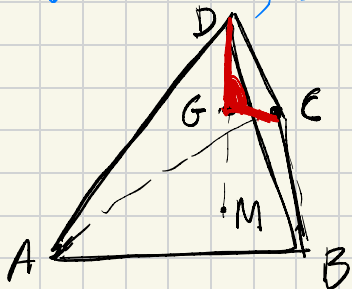
Determino G = baricentro del tetraedro,
tramite la formula

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{A+B+C+D}{4} \\
 &= \frac{(-1, 0, 0) + (1, 0, 0) + (0, \sqrt{3}, 0) + \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}{4} \\
 &= \left(0, \frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}}{4}, \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{4}\right) \\
 &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\left(0, 0, \frac{(4-1)\sqrt{6}}{6}\right) = \left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

Oss. Osservo che $\vec{GD} = D - G = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) - \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$
che è verticale, come deve essere.



L'angolo che mi interessa è quello tra
 $\vec{GD}$ e $\vec{GC}$.

$$\vec{GD} = (0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}) \quad (\text{coordinato in blue sopra})$$

$$\vec{GC} = C - G = (0, \sqrt{3}, 0) - (0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})$$

$$= (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$$

Calcolo (ϑ = angolo tra $\vec{GD}$ e $\vec{GC}$)

$$\cos(\vartheta) = \frac{\vec{GD} \cdot \vec{GC}}{\|\vec{GD}\| \cdot \|\vec{GC}\|}$$

$$= \frac{(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}) \cdot (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6})}{\| (0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}) \| \cdot \| (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}) \|}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{\frac{12}{9} + \frac{1}{6}}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{\frac{24+3}{18}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{6}}}{\sqrt{\frac{27}{18}}} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{18^2}{27 \cdot 3}} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \\
 &= -\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} \\
 &= -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(\vartheta) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109^\circ$$

Oss. Potero fare il calcolo più facilmente:

$$\frac{\vec{GC} \cdot \vec{GD}}{\|\vec{GC}\| \cdot \|\vec{GD}\|}, \quad \vec{GD} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

Nota che $\frac{\vec{GD}}{\|\vec{GD}\|} = \frac{(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2})}{\|(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2})\|} = (0, 0, 1)$

Quindi, potrei semplicemente usare la formula

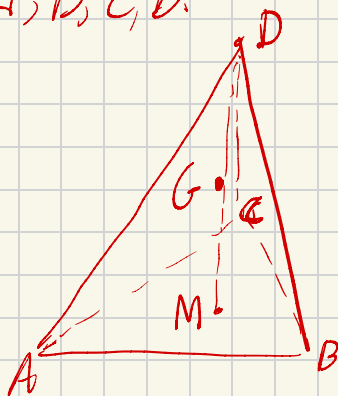
$$\frac{\vec{GC} \cdot (0, 9, 1)}{\|\vec{GC}\|}$$

Notare che invece il calcolo di $\frac{\vec{GC}}{\|\vec{GC}\|}$ non e' immediato

$$\frac{(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{2})}{\sqrt{(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{\sqrt{6}}{2})^2}}$$

Oss Nell'esercizio, ho utilizzato M

solo per determinare D. Ho utilizzato D per determinare G come baricentro di A, B, C, D.



Poss 1. Trovo C.

2. Trovo M come baricentro di A, B, C.

3. Trovo D sulla perpendicolare per M
imponendo $\|\vec{DC}\| = 2$.

4. Trovo G come baricentro di A, B, C, D.

5. Trovo l'angolo come $\frac{\vec{GC} \cdot \vec{GD}}{\|\vec{GC}\| \cdot \|\vec{GD}\|}$.

