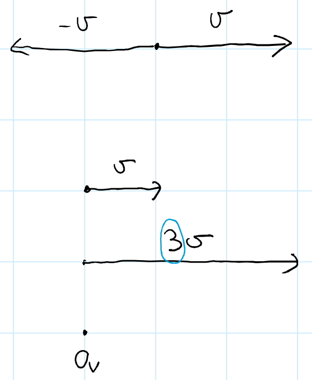
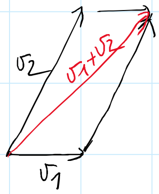
Spazi Vettoriali





Definizione di spazio vettoriale:

Uno spazio vettoriale V su un campo C è un insieme non vuoto dotato di due operazioni:

$$+ : \quad V \times V \longrightarrow V$$
$$(v_1, v_2) \longrightarrow v_1 + v_2 = v_1 \underset{V}{+} v_2$$

Somma di Vettori

$$V \times V = \{ (v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in V \}$$

$$\cdot : \quad C \times V \longrightarrow V$$
$$(a, v) \longrightarrow av$$

Prodotto per Scalari

$$C \times V = \{ (a, v) \mid a \in C, v \in V \}$$

gli elementi di C vengono detti scalari.

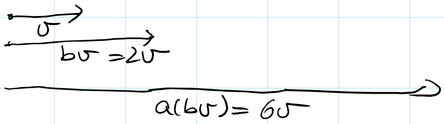
Queste operazioni godono di queste proprietà:

1) $+$ la somma di vettori è commutativa associativa ha un elemento neutro $0_V = \vec{0}$

e ogni vettore $v \in V$ ha un opposto denotato con $-v$.

② $(a+b)\cdot v = av + bv$ $\quad b=2 \quad a=3$

$a(bv) = (ab)v$



$a(v_1+v_2) = av_1 + av_2$

$1 \cdot v = v$

Esempi: $\quad C = \mathbb{R}$ campo dei numeri reali.
Spazi vettoriali Standard

$\mathbb{R}^n$

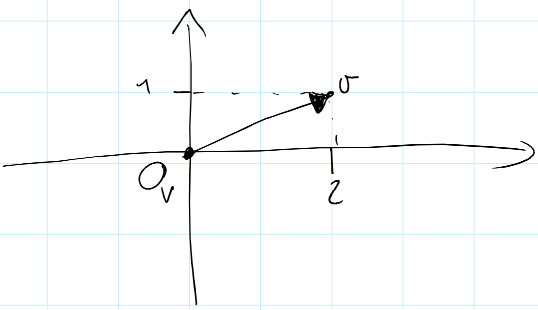
$n=2 \qquad \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y \in \mathbb{R} \right\}$

$$\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} + \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ -1+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \qquad 0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

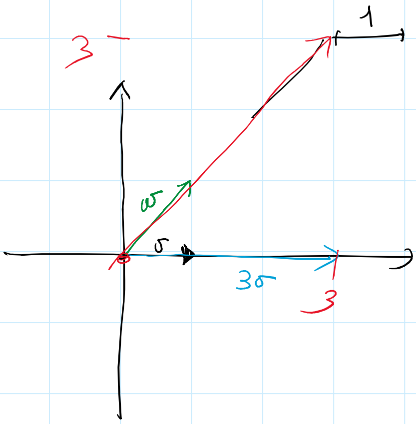
$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^2$



$$-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$$

Sia $a \in \mathbb{R}$ $\qquad v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



$$a \cdot v = a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$v = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad 3v = \begin{pmatrix}3\cdot 1\\3\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$\omega = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad 3\omega = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

Proprietà: dato V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale valgono le seguenti proprietà:

1. $0 \cdot v = 0_V$
2. $(-1)v = -v$
3. $a \cdot 0_V = 0_V \quad \forall a \in \mathbb{C}$

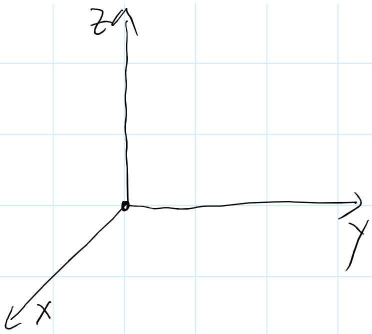
Nota bene → 4. $a \cdot v = 0_V \iff a = 0$ oppure $v = 0_V$

Es: 1. $\underline{0 \cdot v} = (0+0)v = \underline{0v} + 0v \quad -0v$

$0_V = 0 \cdot v$

Esempi: $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$ $\qquad 0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$n = 3$



Es: $\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}} + \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 3+1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

Esempi: $n = 1 \qquad \mathbb{R}^1 = \mathbb{R} = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \}$

Spazio vettoriale banale: $V = \{0\}$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

$$a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1 \\ \vdots \\ a x_n \end{pmatrix} \qquad \underset{v}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} + \underset{v'}{\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}} = \underset{v+v'}{\begin{pmatrix} x_1 + x_1' \\ \vdots \\ x_n + x_n' \end{pmatrix}}$$

Spazi vettoriali di matrici:

Definizione:

Una matrice A con m righe ed n colonne è il dato

$$\xrightarrow{1^\circ \text{riga}} \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1^\circ \text{colonna} & 2^\circ \text{c} & & n^\circ \text{c.} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1^\circ \text{riga} \\ \leftarrow 2^\circ \text{riga} \\ \\ \leftarrow m^\circ \text{riga} \end{array}$$

ovvero una tabella contenente mn numeri nel campo $\mathbb{C}$ disposti in m righe ed n colonne.

Esempio: $M_{2\times3}(\mathbb{R}) = M_{2,3}(\mathbb{R})$ indica le matrici con 2 righe e 3 colonne con entrate in $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

insieme vuoto $\downarrow$ $\emptyset$

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} A_{2,2} &= 5 \\ A_{1,3} &= 3 \end{aligned}$$

$\vec{0}$ è la matrice $\vec{0}_{i,j} = 0 \quad \forall\, i,j$ con $i=1,2$, $j=1,2,3$

Esempio: matrici quadrate: $M_{2,2}(\mathbb{R})$

Traduttore

$M_2(\mathbb{R}) = M_{2,2}(\mathbb{R}) = M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \qquad \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = M_{m,n}(\mathbb{R})$ Sono quadrate se $m=n$

$M_{2,2}(\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R})$ sono matrici quadrate

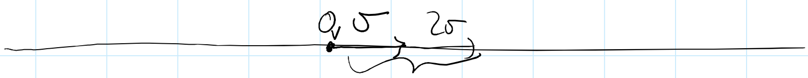
Matrice identica o matrice identità:

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota bene: se V contiene un vettore $v \neq 0_V$ allora



$v + av = (1+a)v$

$V \qquad \{av \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq V$

è un insieme infinito di vettori.

Esempio spazi di polinomi. $C = \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^{\leq 2}[x] := \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$(2x^2 - x + 1) + (-x^2 + x + 3) =$$

$$= x^2 + 4 = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 4$$

$$3(x^2 + x + 1) = 3x^2 + 3x + 3$$

Traduttore

$\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ $\qquad$ $\mathbb{R}^3$

$ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$x^2 + x + 1$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Polinomi di grado $\leq d$ con d fissato $d \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{R}^{\leq d}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \;\middle|\; a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R} \right\} \qquad \mathbb{R}^{d+1}$$

sono $d+1$ parametri $\qquad$ $\begin{pmatrix} a_d \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} \downarrow$

$\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ $\quad d = 2$ $\quad ax^2 + bx + c$

$a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \;\middle|\; d \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 0, \dots, d \right\}$$

ha dimensione infinita

$$\mathcal{F} = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ funzione} \right\}$$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\operatorname{sen} x + x$

$2 \operatorname{tg} x$

$\operatorname{sen} x$

$-\operatorname{sen} x$

Matrici a scale

Esempi in $M_{3,4}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione: una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si dice in forma a scala o a scalini se:

1. le righe nulle, se ci sono, sono le ultime
2. Nelle righe non nulle il primo elemento non nullo viene detto **pivot** e deve essere più a destra del pivot della riga precedente.

Esempi: $\vec{0} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ NO}$$

sì   sì   sì

Definizione: se A è una matrice a scale il numero di pivot si chiama rango di A.

Operazioni elementari sulle matrici:

incognite x, y, z

Esempio 1:

$$\begin{array}{c} 1^\circ R \\ 2^\circ R \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x + 0y + 1z = 0 \\ -2x + 1y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} 1^\circ R \\ 1^\circ R + 2^\circ R \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases} \quad 1^\circ + 2^\circ$$

Esempio 2:

$$\begin{array}{c} 1^\circ \\ 2^\circ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ 4x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} 1^\circ \\ 2^\circ - 2 \cdot 1^\circ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4-2\cdot 2 & 1-2\cdot 0 & 4-2\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases}$$

Esempio 3:

$(2 \quad 4 \quad 8)$ $\qquad 2x + 4y + 8z = 0$

moltiplico la riga per $\frac{1}{2}$

$(1 \quad 2 \quad 4)$ $\qquad x + 2y + 4z = 0$