

Lezione 7

Ricordo: dati $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\vec{w} = (b_1, b_2, b_3)$$

e posto

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{w} \times \vec{w} = \vec{0}$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{j} \times \vec{w} = \vec{i} = -\vec{w} \times \vec{j}$$

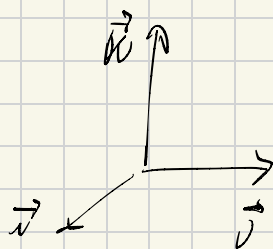
$$\vec{w} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{w} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{w}$$

ovvero

$$\vec{v} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{w}$$

$$\vec{w} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{w}$$



allora

$$\vec{v} \times \vec{w} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{w}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{w})$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & a_1 b_1 \vec{i} \times \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \times \vec{j} - a_1 b_3 \vec{j} + \\ & - a_2 b_1 \vec{w} + a_2 b_2 \vec{j} \times \vec{j} + a_2 b_3 \vec{i} + \\ & + a_3 b_1 \vec{j} - a_3 b_2 \vec{i} + a_3 b_3 \vec{w} \times \vec{w} = \end{aligned}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{w}$$

cioè, in conclusione

$$\vec{v} \times \vec{w} = (\underbrace{a_2 b_3 - a_3 b_2}_{\text{"det"} \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}}, \underbrace{a_3 b_1 - a_1 b_3}_{\text{"det"} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}}, \underbrace{a_1 b_2 - a_2 b_1}_{\text{"det"} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}})$$

Tutto questo può esprimersi in modo
compatto così:

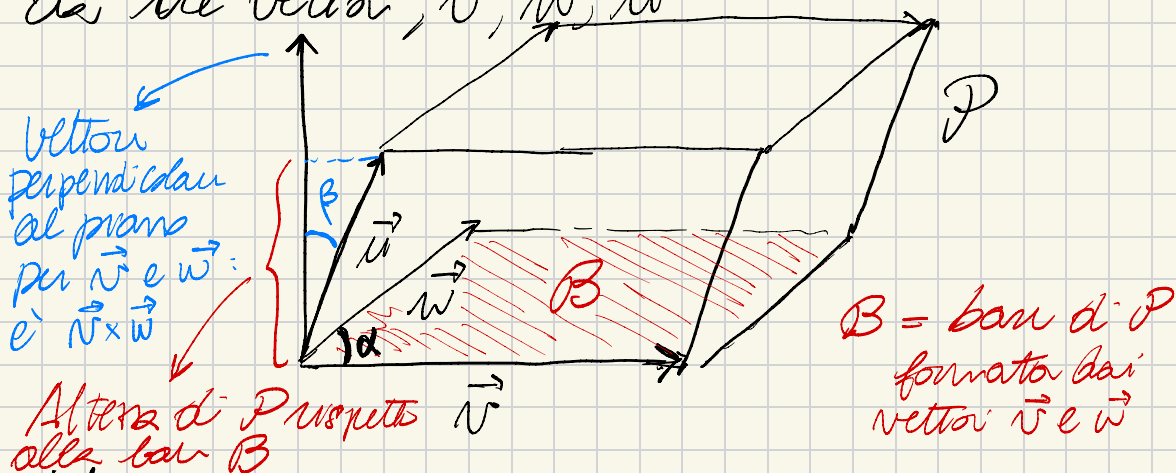
$$\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{w} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

intendendo che lo calcoli così:

$$\begin{aligned} & \vec{i} \det \begin{pmatrix} \vec{j} & \vec{w} \\ a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} - \vec{j} \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{w} \\ a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \\ & + \vec{w} \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Volume di parallelepipedo in $\mathbb{R}^3$

Un parallelepipedo di $\mathbb{R}^3$ è individuato da tre vettori, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$



$$\text{Volume}(P) = \text{Area di base} \times \text{altezza}$$

parallelepipedo determinato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

α = angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$

β = angolo tra $\vec{u}$ e il vettore ortogonale alla base B .

$$\text{Area di base} = \text{Area}(B) = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \sin(\alpha)$$

$$\text{altezza} = \|\vec{u}\| \cos(\beta)$$

Segue:

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \\ &= \left(\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin(\alpha) \right) \cdot (\|\vec{u}\| \cos \beta) \end{aligned}$$

$$= \left\| (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} \right\|$$

Def Chiamo

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$$

il prodotto misto dei tre vettori

$\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{u}$. Il suo modulo è il volume del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Notare che

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$$

è uno scalare.

In coordinate:

$$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{w} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{u} = (c_1, c_2, c_3).$$

Calcolo in coordinate

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \det \begin{pmatrix} \vec{v} & \vec{w} & \vec{u} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot (c_1, c_2, c_3)$$

$$= (a_2 b_3 - b_2 a_3, -(a_1 b_3 - b_1 a_3), a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\cdot (c_1, c_2, c_3) =$$

$$= c_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) - c_2(a_1 b_3 - b_1 a_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Stessa def. di prima dove al posto di $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ho piazzato c_1, c_2, c_3 .

Quindi:

$$\det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = c_1 \det \begin{pmatrix} \cancel{c_1} & \cancel{c_2} & \cancel{c_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} -$$

$$- c_2 \det \begin{pmatrix} \cancel{c_1} & \cancel{c_2} & \cancel{c_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} + c_3 \det \begin{pmatrix} \cancel{c_1} & \cancel{c_2} & \cancel{c_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\text{Volume parallelepiped} = \left| \det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right|$$

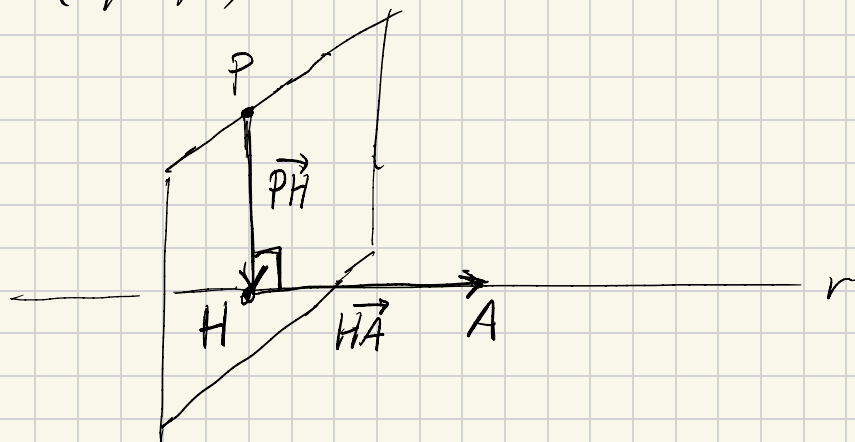
Per come è definito, notare che il det. cambia di segno al scambio due righe o due colonne. Però

$$\text{Volume} = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ ha r la retta

$$r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+2t \\ z = 1-t \end{cases}$$

Travare la proiezione ortogonale del punto $P = (4, 1, 1)$ su r .



H = proiezione ortogonale di P su r
è l'intersezione della retta r con
il piano π che passa per P ed
è ortogonale a r .

Casi:

Cerco il punto $H \in r$ tale che

$$\vec{PH} = H - P$$

ha ortogonale al vettore

$$\vec{HA} = A - H$$

dove A è in qualunque punto di r
(cioè, $\vec{HA}$ è un vettore direttore di r).

Svolgimento

Cerco H tale che $\vec{PH}$ sia ortogonale a $\vec{HA}$,
 $H \in r$.

Il fatto che $H \in r$ mi dice che posso scrivere

(ricordo: $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$) il punto H come

$$\rightarrow r: (2, -1, 1) + t(1, 2, -1)$$

$$H = (2, -1, 1) + t(1, 2, -1) = (2+t, -1+2t, 1-t)$$

per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Scelgo come A il punto $(2, -1, 1)$.

Calcolo:

$$\begin{aligned}\vec{HA} &= (2, -1, 1) - (2+t, -1+2t, 1-t) \\ &= -(t, 2t, -t) = (-t, -2t, t)\end{aligned}$$

$\vec{PH}$: noto che $P \notin r \rightarrow$ Infatti se $P \in r$,
sarebbe della
forma

$$P = (4, 1, 1)$$

$$H = (2+t, -1+2t, 1-t)$$

$$P = (2, -1, 1) + \lambda(1, 2, -1)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

Questo vuol dire:

$$\vec{PH} = H - P$$

$$\begin{aligned}&= (2+t, -1+2t, 1-t) - (4, 1, 1) \\ &= (-2+t, -2+2t, -t)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4 = 2 + \lambda \Rightarrow \lambda = 2 \\ 1 = -1 + 2\lambda \\ 1 = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$$

Perché $0 \neq 2$, lo che
questo sistema non ha
soluzione, dunque $P \notin r$.

Devo ora imporre che i due vettori
 $\vec{PH}$ e $\vec{HA}$ siano tra loro ortogonali, cioè:

$$\vec{PH} \cdot \vec{HA} = 0$$

quindi:

$$(-2+t, -2+2t, -t) \cdot (-t, -2t, t) = 0$$

$$2t - t^2 + 4t - 4t^2 - t^2 = 0$$

$$-6t^2 + 6t = 0$$

$$-6t(t-1) = 0$$

Ho due soluzioni, $t=0$ e $t=1$.

La soluzione $t=0$ corrisponde al caso in cui il vettore $\vec{HA}$ è il vettore nullo (cioè, ho scelto $H=A$) e quindi l'equazione

$$\vec{HA} \cdot \vec{PH} = 0$$

è sempre vera. Perciò, questa soluzione è da escludere.

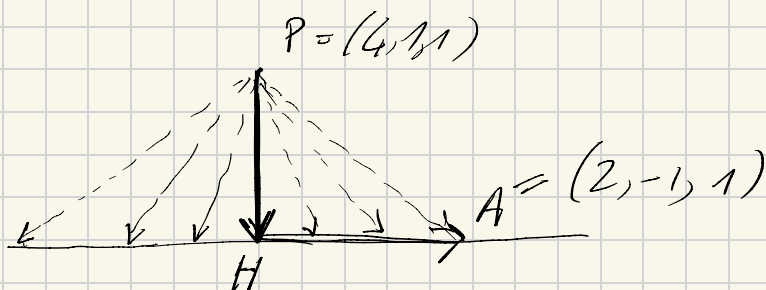
Il caso $t=1$ corrisponde alla scelta di un vettore $\vec{HA}$ non nullo $(-t, -2t, t)$ e dunque è la soluzione dell'esercizio.

Quindi, sostituendo il valore $t=1$ otengo

$$H = (2+t, -1+2t, 1-t) \quad \text{per } t=1$$

$$H = (3, 1, 0).$$

Oss



$$(2+t, -1+2t, 1-t)$$

Per evitare che per una scelta sfortunata il punto H vada a coincidere con il punto A che ha scelto a caso sulla retta, e' preferibile imporre che $\vec{PH}$ sia ortogonale al vettore direzione della retta r , che e' $(1, 2, -1)$

Quindi:

$$\vec{PH} = (-2+t, -2+2t, -t)$$

Così

$$\vec{PH} \cdot (1, 2, -1) = 0$$

$$(-2+t, -2+2t, -t) \cdot (1, 2, -1) = 0$$

$$-2+2t-4+4t+t=0$$

$$6t-6=0$$

$$t=1.$$

Posso anche risolvere l'esercizio in un altro modo, partendo dalle equazioni cartesiane di r e del piano ortogonale a r e passante per P .

Determino per prima cosa le equazioni cartesiane di r .

$$r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+2t \\ z = 1-t \end{cases} \Rightarrow t = 1-z$$

$$r: \begin{cases} x = 2+(1-z) \\ y = -1+2(1-z) \end{cases}$$

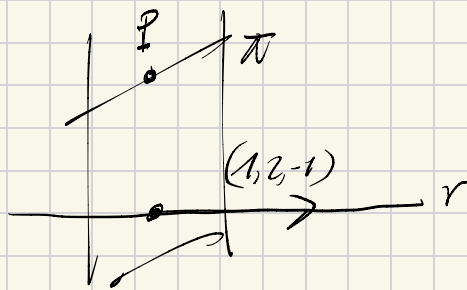
$$\begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

(controllo che $(2, -1, 1)$ sia in pto della
 Retta: $\begin{cases} 2 + 1 - 3 = 0 \quad \checkmark \\ -1 + 2 - 1 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$)

Verifico tramite le equazioni contenute
 che il punto $P = (4, 1, 1)$ non
 appartenga a r :

$$\begin{cases} 4 + 1 - 3 \neq 0 \\ 1 + 2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow P \text{ non soddisfa} \\ \text{le equazioni di } r, \\ \text{dunque } P \notin r.$$

Per risolvere il problema, devo a questo
 punto trovare il piano ortogonale a r
 passante per P .



Perciò il vettore direttore di r è
 $(1, 2, -1)$

Allora tutti i piani π a r sono
della forma

$$x + 2y - z + d = 0$$

per qualche d .

Basta che imponga che questo piano
generico passi per $P = (4, 1, 1)$, determinando
così d . Cioè:

$$4 + 2 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -5.$$

Perciò il piano cercato è

$$\pi: x + 2y - z - 5 = 0.$$

Il punto H è $\pi \cap r$, cioè la soluzione
del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z - 5 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Esempio.

$$\Rightarrow H = (3, 1, 0)$$

