

ESERCIZI

Spazi vettoriali, basi, intersezione, somma

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (0, 2, 0, -1)$ e $u_2 = (1, 1, 1, 0)$. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

- (a) Determinare una base di U e una base di V .
- (b) Determinare la dimensione e una base di $U \cap V$.
- (c) Determinare la dimensione e una base di $U + V$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, 4, -1, 1)$, $u_2 = (1, -2, -1, -3)$ e W il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$ e $2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0$.

- (a) Determinare una base di U e una base di V .
- (b) Si stabilisca se la somma di U e W è diretta e si determinino delle basi di $U + W$ e di $U \cap W$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 0, -1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 0, 2)$ e $u_3 = (0, 1, -2, -1)$.

- (a) Si determini la dimensione di U .
- (b) Si determini una base di un sottospazio W tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e si dica se un tale sottospazio W è unico.
- (c) Dato il vettore $u_t = (t, -1, 0, -1)$, si stabilisca per quale valore di t si ha $u_t \in U$.

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, 0, -1, 2)$, $u_2 = (-2, 1, 2, -1)$, $u_3 = (0, 3, 4, 1)$.

Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$W : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ -3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) Si determini la dimensione e una base di U , la dimensione e una base di W .
- (b) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (0, 3, -1, 2)$, $v_2 = (1, 2, -2, 0)$ e $v_3 = (2, 1, t, -2)$.

- (a) Determinare la dimensione di V , al variare di $t \in \mathbb{R}$.
- (b) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$. Si scriva una base di U .

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 0, 3)$, $u_2 = (1, 4, -3, 3)$, $u_3 = (1, -2, 1, 1)$ e sia W il sottospazio di equazioni $3x_1 + x_3 = 0$, $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

- (a) Si trovi una base di U e una base di W .
- (b) Si trovi una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 7. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $W = \{(a + 2b, -a + b, -2b + c, a + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Determinare una base di U e una base di W .
- (b) Scrivere un'equazione nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio W .
- (c) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

Esercizio 8. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 2)$, $u_2 = (0, 2, -1, 1)$, $u_3 = (3, -4, -1, 4)$, $u_4 = (2, -6, 1, 0)$.

- (a) Verificare che $\dim U = 3$ e trovare una base di U .
- (c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Trovare una base di W e una base di $U \cap W$.

Esercizio 9. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio generato da $w_1 = (1, 0, 4, -2)$, $w_2 = (1, 1, 1, 0)$.

- (a) Determinare una base di U .
- (b) Determinare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.
- (c) Per ogni vettore della base di $U \cap W$, determinare le sue coordinate rispetto alla base di U trovata in (a).

Esercizio 10. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$:

$$u = (0, 1, 1) \quad v = (1, -1, 0) \quad w = (1, 0, -1)$$

- (a) Si dimostri che l'insieme $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- (b) Si trovino le coordinate dell'elemento $k = (1, 1, 1)$ nella base $\mathcal{B}$.
- (c) Si trovi il valore del parametro t che garantisca che il vettore $(-2, t, 5)$ appartenga al sottospazio generato da u e w .

Esercizio 11. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia K il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da u, v, w e p .

- (a) I vettori u, v, w e p sono linearmente indipendenti? Si giustifichi la risposta.
- (b) Si determini una base per K .

Esercizio 12. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti vettori:

$$u_1 = (1, 1, 0, -2) \quad u_2 = (0, 2, 1, -1)$$

- (a) Determinare le equazioni cartesiane di U .
- (b) Determinare se il vettore $u = (3, -1, -2, -4)$ appartiene a U e determinare le coordinate di u rispetto alla base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ di U .
- (c) Completare $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 13. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai 3 vettori:

$$v_1 = (1, 0, 2, -1), \quad v_2 = (0, 2, 1, 1), \quad v_3 = (2, 2, 5, -1)$$

- (a) Determinare se v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. In caso negativo, trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi.
- (b) Estrarre una base $\mathcal{B}$ di U dall'insieme di generatori $\{v_1, v_2, v_3\}$. Determinare la dimensione di U .
- (c) Determinare le equazioni cartesiane di U .
- (d) Determinare se $u = (-1, -2, -3, 0) \in U$ e, in caso affermativo, trovare le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e completarlo ad una base di U .