Lezione 3

martedì 7 ottobre 2025 14:30

Altro metodo (lo studieremo più avanti)

$$u_1 = (1, 0, -1, 1) \quad u_2 = (2, 1, -1, 3) \quad u_3 = (1, 2, 1, 3) \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{matrice}} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2^a riga $- 2 \times 1^a$ riga

3^a riga $- 1^a$ riga

3^a riga $- 2 \times 2^a$ riga

Quindi le 3 righe della matrice, cioè i 3 vettori u_1, u_2, u_3, sono linearmente dipendenti.

Esercizio. $V = \mathbb{R}^3$ e sia U il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$.

Trovare dimensione e base di U.

Soluzione. $x_2 = 2x_1 + 3x_3$ ci sono ∞ soluzioni per ogni x_1 e x_3

$$\text{pongo} \begin{cases} x_1 = a_1 \in \mathbb{R} \\ x_3 = a_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2a_1 + 3a_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + 3a_3 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1} + a_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_3} = a_1 u_1 + a_3 u_3$$

$u_1 = (1, 2, 0)$

$u_3 = (0, 3, 1)$

sono linearmente indipendenti?

Fare il controllo come esercizio.

Quindi u_1 e u_3 sono una base di U

e quindi $\dim U = 2$.

Esercizio. $V = \mathbb{R}^4$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$U : \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$\dim U$? $\qquad$ Base di U?

$$U : \begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 + 3x_2 = 0$$

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \quad \infty \text{ soluzioni } \forall x_1 \text{ e } \forall x_4$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ sono una base di U.

$\dim U = 2$

<u>Esercizio</u> (esame del 18 luglio 2024)

Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Sia $W = \{ (\underbrace{a+2b}_{x_1}, \underbrace{-a+b}_{x_2}, \underbrace{-2b+c}_{x_3}, \underbrace{a+c}_{x_4}) \mid a,b,c \in \mathbb{R} \}$

Trovare una base di U e una base di W.

<u>Soluzione</u>. $\begin{cases} x_2 = 2x_1 - 3x_4 \\ x_3 = -2x_1 - x_4 \end{cases}$ ci sono ∞ soluzioni per ogni x_1 e x_4

poniamo $\begin{cases} x_1 = a_1 \in \mathbb{R} \\ x_4 = a_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 - 3a_2 \\ -2a_1 - a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_1} + a_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_2}$$

Verifichiamo che u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti.

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 - 3a_2 \\ -2a_1 - a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

quindi u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti,

quindi sono una base di U, $\dim U = 2$.

Nel caso di W si ha: $\begin{cases} x_1 = a + 2b \\ x_2 = -a + b \\ x_3 = -2b + c \\ x_4 = a + c \end{cases}$

$\dim W = 3$ (ci sono 3 parametri a, b, c)

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Controlliamo se w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti.

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ -a_1 + a_2 \\ -2a_2 + a_3 \\ a_1 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2a_2 & \Rightarrow \quad a_1 = 0 \\ 2a_2 + a_2 = 0 & \Rightarrow \quad a_2 = 0 \\ \sim & \Rightarrow \quad a_3 = 0 \\ \sim & \end{cases}$$

Quindi w_1, w_2, w_3 sono una base di W.