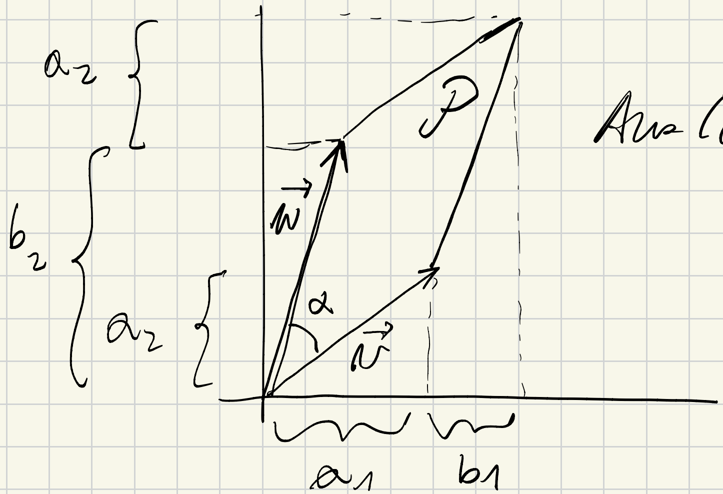
Lezione 6

Abbiamo calcolato in coordinate l'area di un parallelogramma

$\vec{v} = (a_1, a_2)$, $\vec{w} = (b_1, b_2)$



$\text{Area}(P) = |\vec{v}| |\vec{w}| |\sin\alpha|$

$$\text{Area}(P) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Introduciamo una notazione

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1$$

una definizione

ANTIDIAGONALE

DIAGONALE PRINCIPALE

Questa operazione, che chiamo <u>determinante</u> della matrice 2×2: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

calcola (se ne prendo il modulo) l'area del parallelogramma P definito dai vettori (a_1, a_2), (b_1, b_2).

Notiamo che se scambio le due righe, il determinante cambia di segno:

$$\det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = b_1 a_2 - b_2 a_1 = -(a_1 b_2 - b_1 a_2) = -\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

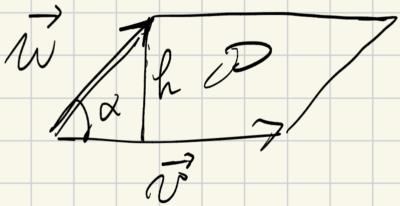
<u>Esercizio</u>: Mostrare che il determinante cambia di segno anche se scambio le due colonne tra loro.

Conclusione

$$\text{Area}(P) = \left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}\right|$$

Parallelogramma in $\mathbb{R}^3$ e prodotto vettoriale

In $\mathbb{R}^3$, come in $\mathbb{R}^2$, dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ indico con P il parallelogramma formato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$



α = angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$

$$\text{Area}(P) = \|\vec{v}\| \cdot h, \qquad h = \left| \|\vec{w}\| \cdot \sin\alpha \right|$$

$$\overset{!}{=} \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\sin(\alpha)|$$

In coordinate: Utilizzo per il calcolo il prodotto vettoriale, che definisco così:

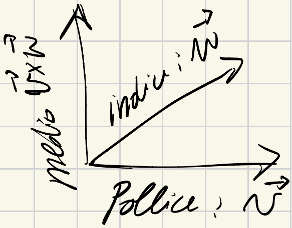
Def. Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{w} = (b_1, b_2, b_3)$ in $\mathbb{R}^3$ (funziona solo in $\mathbb{R}^3$) è un vettore (quindi il risultato del prodotto vettoriale è un vettore)

$\vec{v} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

con caratterizzato:

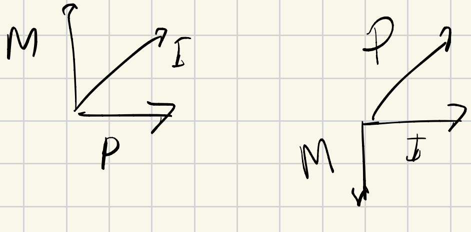
(•) Direzione di $\vec{v} \times \vec{w}$ è perpendicolare sia a $\vec{v}$ che a $\vec{w}$

(•) Verso di $\vec{v} \times \vec{w}$ è determinato dalla "regola della mano destra"



(•) Modulo di $\vec{v} \times \vec{w}$ = Area(P)
$\overset{!}{=} \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\sin(\alpha)|$.

<u>Oss.</u> Notare che $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$:
questo viene direttamente dalla regola della mano destra



P = pollice
I = indice
M = medio

Quindi,

$$\text{Area}(P) = \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{w} \times \vec{v}\|.$$

Come si calcola in coordinate il prodotto vettoriale.

$$\underbrace{\vec{i} = (1,0,0)}_{\vec{e}_1}, \quad \underbrace{\vec{j} = (0,1,0)}_{\vec{e}_2}, \quad \underbrace{\vec{k} = (0,0,1)}_{\vec{e}_3}$$

Notiamo che:

$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \qquad (\operatorname{sen}(0) = 0)$

$\vec{j} \times \vec{j} = 0$

$\vec{k} \times \vec{k} = 0$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ (gli assi cartesiani x, y, z in $\mathbb{R}^3$ sono disposti secondo la regola della mano destra)

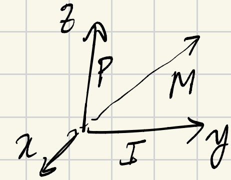
$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ (perché $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$)

$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$$



$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $w = (b_1, b_2, b_3)$

Posso quindi calcolare in coordinate:

$$\vec{v}\times\vec{w} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

$$= \cancel{a_1 b_1 \vec{i}\times\vec{i}} + \boxed{a_1 b_2 \vec{i}\times\vec{j}} + \boxed{a_1 b_3 \vec{i}\times\vec{k}} +$$

$$a_2 b_1 \vec{j}\times\vec{i} + \cancel{a_2 b_2 \vec{j}\times\vec{j}} + a_2 b_3 \vec{j}\times\vec{k} +$$

$$+ a_3 b_1 \vec{k}\times\vec{i} + a_3 b_2 \vec{k}\times\vec{j} + \cancel{a_3 b_3 \vec{k}\times\vec{k}}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 \boxed{- a_1 b_3})\vec{j} +$$

$$+ \boxed{(a_1 b_2} - a_2 b_1)\vec{k}$$

Esercizio: Controllare questo calcolo usando

$$i\times j = -j\times i = k$$

$$i\times k = -k\times i = -j$$

$$j\times k = -k\times j = i$$