

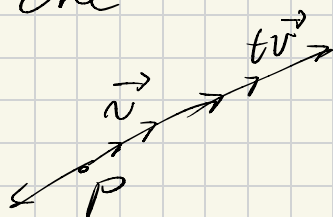
Lezione 5

Rette e piani nello spazio

Rette in $\mathbb{R}^3$

Se $P = (p_1, p_2, p_3)$ un punto di $\mathbb{R}^3$, e $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, definisco la retta che passa per P ed è parallela a $\vec{v}$ come fatto in $\mathbb{R}^2$, cioè come l'insieme dei punti $X = (x, y, z)$ tali che

$$X = P + t\vec{v}$$



per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Ricavo parametriche e cartesiane:

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(a_1, a_2, a_3)$$

$$\begin{cases} x = p_1 + ta_1 \\ y = p_2 + ta_2 \\ z = p_3 + ta_3 \end{cases}$$

EQUAZIONI
PARAMETRICHE DELLA
RETTA $r: P + t\vec{v}$.

Posso ricavare il parametro t da una delle tre equazioni (una qualunque in cui il parametro t compare, e una sappiamo che c'è perché almeno uno tra $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ è non zero). Sostituendo il parametro t così ricavato nelle due altre equazioni ottengo le EQUAZIONI CARTESIANE

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0 \end{cases}$$

Esempio Retta per $(1, 2, 1)$ e parallela a $(-1, 0, 3)$.

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(-1, 0, 3)$$

PARA
METR
CHE

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

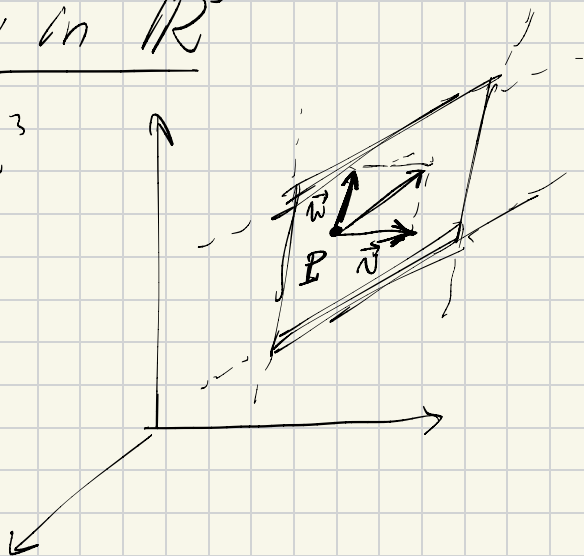
$$\begin{cases} t = 1 - x \\ y = 2 \\ \downarrow \\ z = 1 + 3(1 - x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 3x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

CARTESIANE

Piano in $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$



Fisso un punto P e due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, entrambi non nulli, e non multipli l'uno dell'altro. Allora il piano π passante per P e parallelo a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è

$$X = P + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$(0,0,0)$
#

$(0,0,0)$
#

In coordinate: $P = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{w} = (b_1, b_2, b_3)$

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda(a_1, a_2, a_3) + \mu(b_1, b_2, b_3)$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE DI π :

$$\pi: \begin{cases} x = p_1 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = p_2 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = p_3 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

Oss Se $\vec{v} = (a_1, 0, 0)$, $\vec{w} = (b_1, 0, 0)$
 $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, allora

$$\vec{w} = \frac{b_1}{a_1} \vec{v}, \text{ che abbiamo escluso.}$$

(perch' abbiamo richiesto

che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non fossero multipli
 l'uno dell'altro).

Perch' a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 sono
 non nulli "in posti diversi", permettendo
 di ricavare sia λ che μ da due delle
 equazioni parametriche. Sostituendo nella
 terza, otteniamo le EQUAZIONI CARTESIANE

$$\boxed{\pi: ax + by + cz + d = 0}$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Esercizio Scrivere equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per $P = (2, -2, 1)$ e parallelo ai vettori $\vec{v} = (1, 1, 2)$ e $\vec{w} = (0, -2, 3)$.

Soluzione

Scrivo le parametriche per prime:

$$(x, y, z) = (2, -2, 1) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(0, -2, 3)$$

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda - 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda + 3\mu \end{cases}$$

Ricavo le cartesiane:

Ricavo λ dalla prima eq. e μ dalla seconda e sostituisco nella terza (con un passaggio intermedio)

$$\begin{cases} \lambda = x - 2 \\ 2\mu = -y - 2 + \lambda \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}y - 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = 1 + 2\lambda + 3\mu \end{cases}$$

passaggio intermedio!
Sostituire λ nella II eq.

$$\begin{cases} \lambda = x-2 \\ \mu = -\frac{1}{2}y-1 + \frac{1}{2}(x-2) = -\frac{1}{2}y-1 + \frac{1}{2}x-1 \\ z = 1+2(x-2)+3(-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x-2) \end{cases}$$

Semplifico la III eq.

$$2z = 2 + 4x - 8 - 3y + 3x - 12$$

$$\boxed{\pi: 7x - 3y - 2z - 18 = 0}$$

Come nel caso delle rette, noto che i coefficienti del piano formano un vettore $(7, -3, -2)$ che è $\neq (0, 0, 0)$ e che è perpendicolare a entrambi $\vec{v}$ e $\vec{w}$: infatti

$$\vec{v} = (1, 1, 2), \text{ e}$$

$$\vec{v} \cdot (7, -3, -2) = (1, 1, 2) \cdot (7, -3, -2) = 7 - 3 - 4 = 0$$

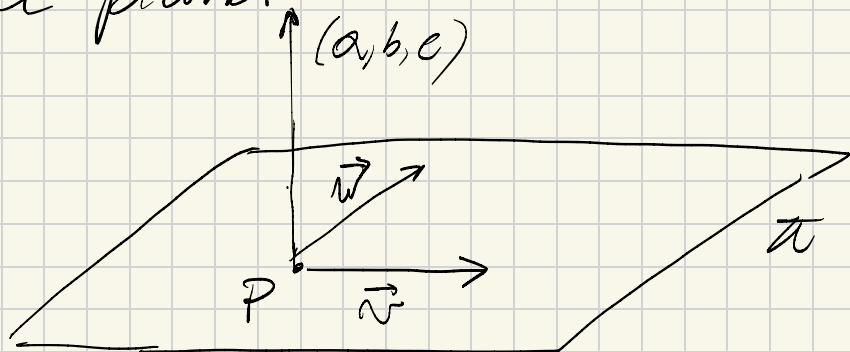
$$\vec{w} = (0, -2, 3), \text{ e}$$

$$(0, -2, 3) \cdot (7, -3, -2) = 0 - 6 - 6 = 0.$$

Chiamo $\vec{v}$ e $\vec{w}$ i vettori diretti del π

Conclusione: Un piano π è
descritto da un'equazione del tipo
 $ax + by + cz + d = 0$

Il vettore $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ed è
perpendicolare ad entrambe le direzioni
del piano.



Esercizio Sia π il piano di equazione

$$\pi: 2x - y + 3z - 5 = 0$$

e sia $P = (2, 4, 1)$.

(a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiane della retta per P perpendicolare a π .

La direzione della retta cercata, che chiameremo r , è $(2, -1, 3)$

($\pi: 2x - y + 3z - 5 = 0$). Le sue parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

$$(x, y, z) = \underbrace{(2, 4, 1)}_P + t \underbrace{(2, -1, 3)}_{\text{vettore } \perp \text{ a } \pi}$$

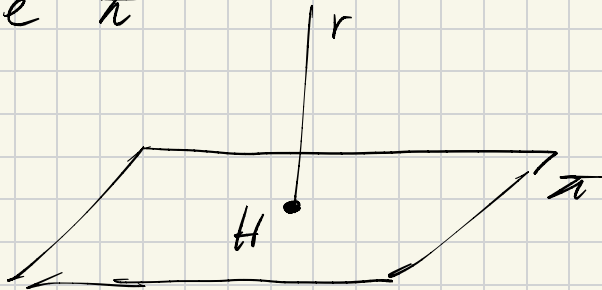
ortogonale.

Cartesiane:

$$\begin{cases} t = 4 - y \\ x = 2 + 2(4 - y) \\ z = 1 + 3(4 - y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ 3y + z - 13 = 0 \end{cases}$$

(b) Trovare il punto H di intersezione tra r e π



Basta calcolare $r \cap \pi$:

$$r \cap \pi: \begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ 3y + z - 13 = 0 \\ 2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - 2y \\ z = 13 - 3y \\ 2(10 - 2y) - y + 3(13 - 3y) - 5 = 0 \end{cases}$$

$$20 - 4y - y + 39 - 9y - 5 = 0$$

$$-14y + 54 = 0$$

$$y = \frac{54}{14} = \frac{27}{7}$$

$$x = 10 - 2\left(\frac{27}{7}\right) = \frac{70-54}{7} = \frac{16}{7}$$

$$z = 13 - 3\left(\frac{27}{7}\right) = \frac{10}{7}$$

$$H = \left(\frac{16}{7}, \frac{27}{7}, \frac{10}{7}\right).$$

Oss 1 Ogni retta in $\mathbb{R}^3$ è descritta da varie coppie di equazioni:

Nell'esercizio precedente

$$r: \begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ 3y + z - 13 = 0 \end{cases}$$

Posso riscrivere sostituendo ad esempio la prima equazione con la somma delle due:

$$r: \begin{cases} x + 5y + z - 23 = 0 \\ 3y + z - 13 = 0 \end{cases}$$

Allo stesso modo posso sostituire ad esempio la seconda equazione con

la somma o la differenza delle due equazioni:

Questo posso farlo perché:

$$A_1 = B_1 \Rightarrow A_1 + A_2 = B_1 + B_2$$

$$A_2 = B_2$$

$$A_1 - A_2 = B_1 - B_2$$

eccetera.

Oss. 2 Similmente, i piani

$$\pi: 2x - y + 3z = 4$$

$$\pi: 4x - 2y + 6z = 8$$

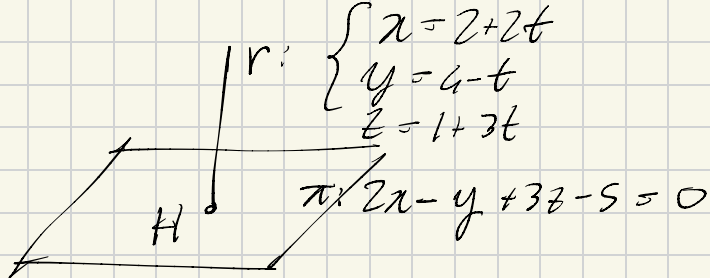
sono lo stesso piano: se moltiplico

un'eq. per un numero $\neq 0$, l'eq. non cambia.

Oss 3. Sul punto (b) dell'es. precedente:

$$\text{Trovare } H = r \cap \pi.$$

Posso anche lavorare "misto" con le parametriche di r e le cartesiane di π .



$$r: \begin{cases} x=2+2t \\ y=4-t \\ z=1+3t \end{cases}$$

$$\pi: 2x-y+3z-5=0$$

H

Per trovare H, posso trovare per quali valori di t il punto generico di r

$$(2+2t, 4-t, 1+3t)$$

Verifica l'equazione di π . Con:

$$2(2+2t) - (4-t) + 3(1+3t) - 5 = 0$$

$$4 + 4t - 4 + t + 3 + 9t - 5 = 0$$

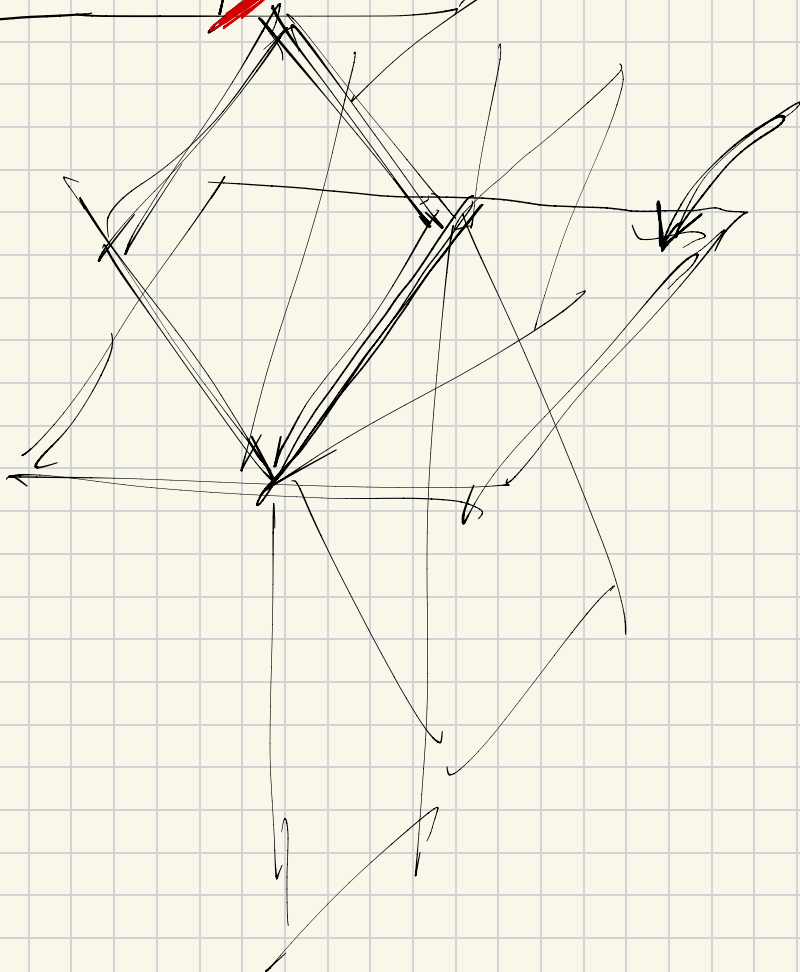
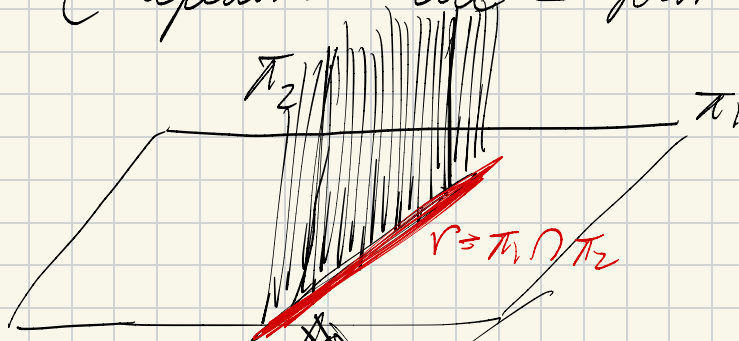
$$14t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{7}$$

Punto $H = \left(2 + \frac{2}{7}, 4 - \frac{1}{7}, 1 + 3 \cdot \frac{1}{7} \right)$

$$= \left(\frac{16}{7}, \frac{27}{7}, \frac{10}{7} \right)$$

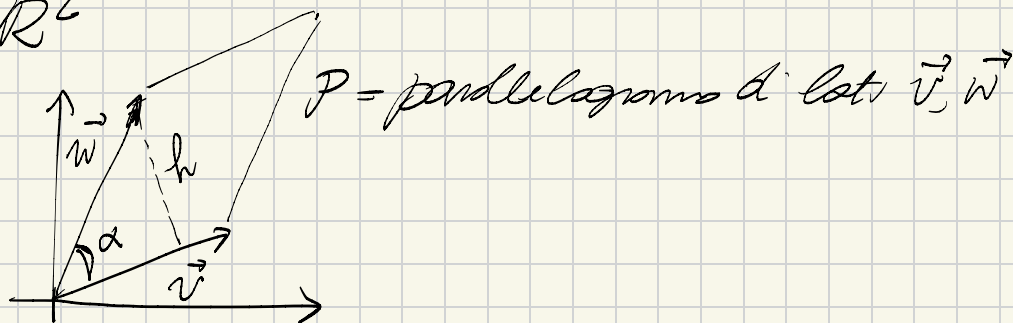
Ques 4. Una retta è intersezione di due piani:

$r : \begin{cases} \text{equazioni del I piano, } \pi_1 \\ \text{equazioni del II piano, } \pi_2 \end{cases}$



Area e volumi

La prima domanda che ci poniamo è:
Come calcolare l'area del parallelogramma
di $\mathbb{R}^2$



$$\text{Area}(P) = \text{base} \times \text{altezza}$$

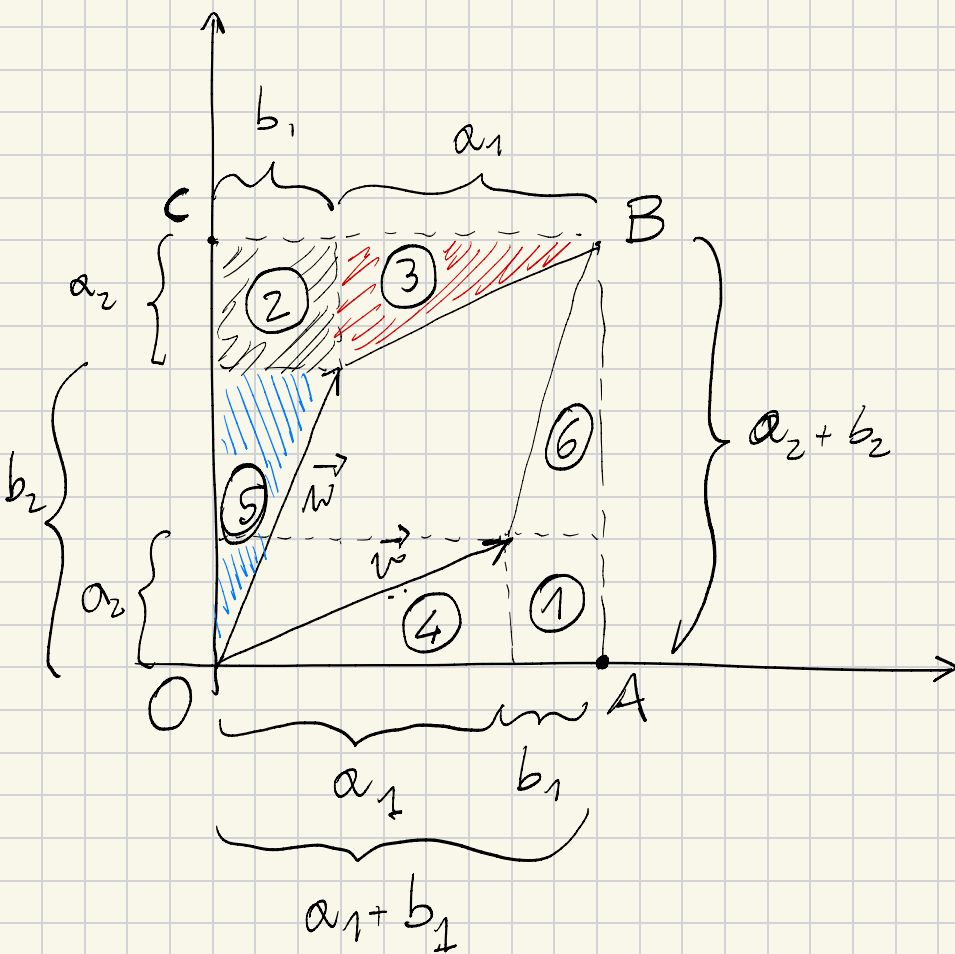
$$\downarrow \|\vec{v}\| \cdot h, \quad h = \|\vec{w}\| \sin(\alpha)$$

$$\downarrow \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \sin(\alpha)$$

In coordinate:

$$\vec{v} = (a_1, a_2)$$

$$\vec{w} = (b_1, b_2)$$



$$\begin{aligned} \text{Area } (OABC) &= (a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \\ &= a_1 a_2 + b_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Area } (1) &= \text{Area } (2) = a_2 \cdot b_1 \\ \text{Area } (3) &= \text{Area } (4) = \frac{a_1 \cdot a_2}{2} \\ \text{Area } (5) &= \text{Area } (6) = \frac{b_2 \cdot b_1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Area}(P) = \text{Area}(OABC) - (\text{Area} \textcircled{1} + \text{Area} \textcircled{2} + \text{Area} \textcircled{3} + \text{Area} \textcircled{4} + \text{Area} \textcircled{5} + \text{Area} \textcircled{6})$$

$$= a_1 a_2 + b_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 b_2 -$$

$$- 2a_2 b_1 - a_1 a_2 - b_2 b_1 =$$

$$= a_1 b_2 - a_2 b_1.$$