Lezione 3a

Numeri complessi

$$\mathbb{C} = \{ a+ib \mid a,b \in \mathbb{R} \}$$

$$\boxed{x^2 = -1}$$

$$i^2 = -1$$

$z \in \mathbb{C}$

Forma algebrica: $z = a+ib$

Forma trigonometrica: $z \neq 0$

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2} \qquad r>0 \quad r \in \mathbb{R}$$

θ argomento
$$\begin{cases} r\cos\theta = a \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta = b \end{cases}$$

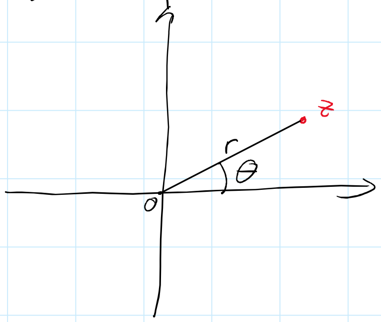
Nota bene:

$$r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = r'(\cos\theta' + i\,\mathrm{sen}\,\theta')$$

se e solo se

$$\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$



Formule di De Moivre:

Teorema:

L'equazione $x^m = z$ con $m \in \mathbb{N}$ $m>0$ e $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ ha esattamente m soluzioni distinte $x_0, \dots, x_{m-1}$ dette radici m-esime di z e sono: se $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Formule De Moivre

$$\boxed{x_k = \sqrt[m]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{m}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{m}\right)\right) \quad \text{con } k = 0, \dots, m-1}$$

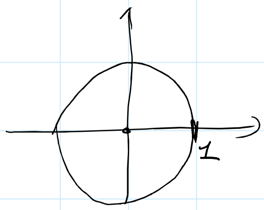
Le radici si dispongono come vertici di un poligono regolare con m-lati nel piano di Argand-Gauss, tale poligono è iscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[m]{r} = r^{\frac{1}{m}}$.

Esempio: $x^7 = 1$ $\qquad x^m = z \quad m=7 \quad z=1$

Passo 1: Scrivere $z=1$ in forma trigonometrica

$|z| = |1| = 1$ $\qquad \begin{cases} 1 \cos\theta = 1 \\ 1 \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases} \qquad \theta = 0$

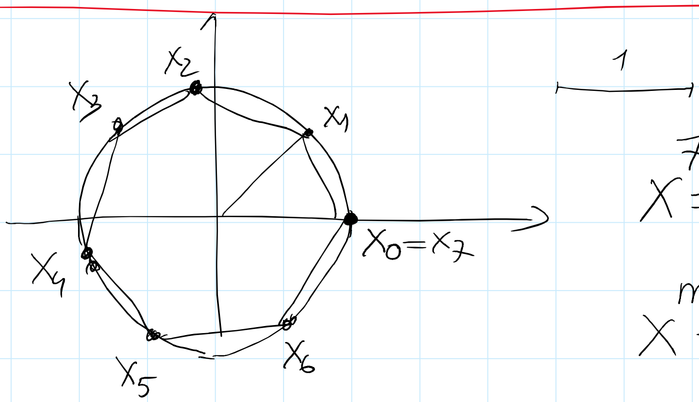
$1 = 1 + i \cdot 0$



$x^7 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

Passo 2: $\qquad$ Soluzione:

$$\boxed{x_K = \sqrt[7]{1}\left(\cos\left(\frac{0+2K\pi}{7}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{0+2K\pi}{7}\right)\right) \qquad K = 0, 1, \dots, 6}$$



$x^7 = 1$

$x^m = 1$

$$x_K = \left(\cos\left(\frac{2K\pi}{7}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2K\pi}{7}\right)\right)$$

Per $K=0$ $\qquad x_0 = 1 = x_7 \qquad x^7 = 1$

Per $K=1$ $\qquad x_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

$\vdots \qquad \vdots$

Per $K=6$ $\qquad x_6 = \cos\left(\frac{12\pi}{7}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{7}\right)$

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$(1+i)x^5 - 16(\sqrt{2})x = 0.$$

(3 pti)

Svolgimento:

$$(1+i)x^5 - 16\sqrt{2}\,x = 0$$

$$x\left((1+i)x^4 - 16\sqrt{2}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$\boxed{x=0}$ 1° soluzione appure

$$(1+i)x^4 - 16\sqrt{2} = 0$$

$$(1+i)x^4 = 16\sqrt{2} \qquad x^4 = z$$

$$x^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} =$$

$$= \frac{\cancel{16}^{\,8}\sqrt{2}(1-i)}{\cancel{1+1}} = 8\sqrt{2}(1-i)$$

$$\boxed{x^4 = 8\sqrt{2}(1-i)} \qquad n=4$$

Passo 1: $z = 8\sqrt{2}(1-i)$ scrivere z in forma trigonometrica.

Passo 2: applicare le formule di De Moivre.

Passo 1: $|z| = |8\sqrt{2}(1-i)| =$

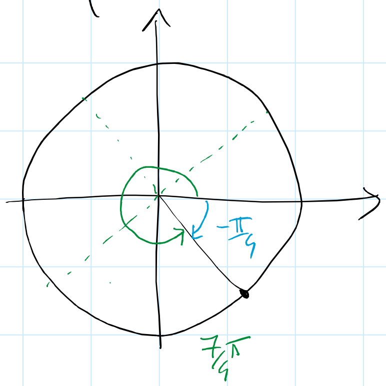
$$= 8\sqrt{2}\cdot|1-i| = 8\sqrt{2}\sqrt{2} = 16 \qquad |cz| = |c||z|$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$z = 8\sqrt{2}(1-i) =$$

$$= 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2}\,i \qquad \boxed{r=16}$$

$$\begin{cases} a = 8\sqrt{2} = 16\cos\theta \\ b = -8\sqrt{2} = 16\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{8\sqrt{2}}{16} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \mathrm{sen}\,\theta = -\dfrac{8\sqrt{2}}{16} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

oppure

$\theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7}{4}\pi$

$$\theta = \frac{7\pi}{4} \qquad r = 16$$

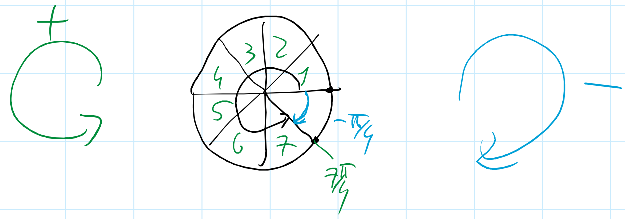
$$\boxed{X_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{4}\right)\right) \quad k = 0,1,2,3}$$

$$x_k = \sqrt[m]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{m}\right)\right)$$

$$k = 0, \dots, m-1$$

$$\boxed{X_k = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi + 8k\pi}{16}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi + 8k\pi}{16}\right)\right) \quad K = 0,1,2,3}$$

Soluzione $\{0,\ X_k \text{ con } k = 0,1,2,3\}$



$$\left(\frac{\frac{7}{4}\pi+2k\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)$$

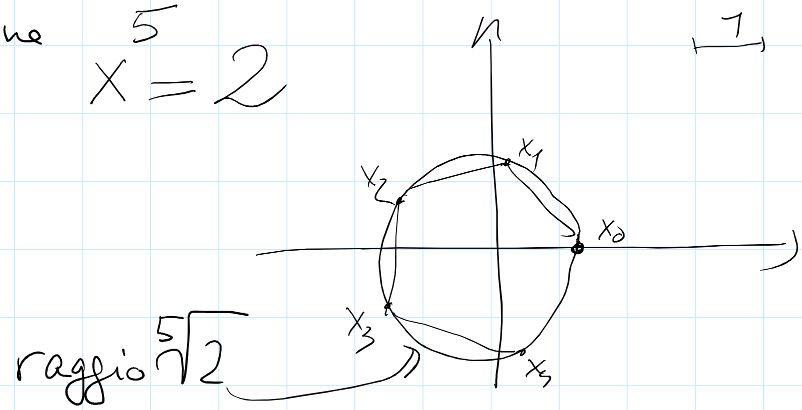
$$=\frac{7}{16}\pi+\frac{2k\pi}{4}=\frac{7\pi+8k\pi}{16}$$

$8\sqrt{2}(1-i)=8\sqrt{2}-8\sqrt{2}i$ ha modulo

$$\sqrt{64\cdot 2+64\cdot 2}=\sqrt{64\cdot 4}=8\cdot 2=16$$

Esempio: determinare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$x^5=2$$



$$x_k=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{5}\right)\quad k=0,\dots,4$$

$$=\boxed{\left(\sqrt[5]{2}\,e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right)}$$

Forma esponenziale dei numeri complessi.

Formule di Eulero

$$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = \boxed{r\,e^{i\theta}}$$

Forma esponenziale

$z \neq 0$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Identità di Euler

Teorema fondamentale dell'algebra:

Ogni equazione polinomiale

$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

$a_d \neq 0$ con $a_i \in \mathbb{C}$ per $i = 0, \dots, d$

ha sempre una radice (ossia una soluzione) in $\mathbb{C}$.

Conseguenze:

C1: Ogni $a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$

ha esattamente d radici in $\mathbb{C}$ se contate con molteplicità.

$a_d \neq 0$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad (x+1)^2 = 0$$

$$(x+1)(x+1)$$

C2: $\sum_{k=0}^{d} b_k x^k = 0$ e $b_k \in \mathbb{R}$

Se $z \in \mathbb{C}$ è radice $\sum_{k=0}^{d} b_k z^k = 0$

anche $\bar{z} \in \mathbb{C}$ è radice $\sum_{k=0}^{d} b_k \bar{z}^k = 0$

Es: $x^4 - 1 = 0$ $\quad (i)^4 = (i^2)^2 = -1^2 = 1$

i è radice $\Longrightarrow$ $-i$ è radice perché $x^4 - 1$ ha tutti coefficienti reali.

C3. Se $\sum_{k=0}^{d} b_k x^k = 0$ polinomio con coefficienti reali cioè $b_k \in \mathbb{R}$ $\forall k = 0, \dots, d$ se d è dispari allora vi è sempre una radice reale.

j) $\boxed{z^3 = \dfrac{4+4i}{|z|^2}}$ $\quad$ [R. $\sqrt[5]{4\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)$.]

Esercizio: Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi dell'equazione:

$$\boxed{z^3 = \frac{4+4i}{|z|^2}}$$

$$(e^x)^3 = e^{3x}$$

Quante sono?

Svolgimento: $\quad |z| \neq 0 \quad z \neq 0$

$\boxed{z = r e^{i\theta}}$ $\quad r > 0 \quad r \in \mathbb{R}$

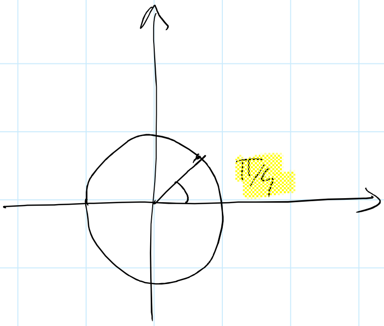
$r^3 e^{i3\theta} = \dfrac{4+4i}{r^2}$ $\quad$ moltiplicando per r^2 otteniamo

$$r^5 e^{i3\theta} = 4+4i$$

$$|4+4i| = |4(1+i)| = 4|1+i| = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 = 4\sqrt{2}\cos\theta \\ 4 = 4\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$4+4i = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$r^5 e^{i3\theta} = 4+4i = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{cases} r^5 = 4\sqrt{2} \Rightarrow \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{matrix} r = \sqrt[5]{4\sqrt{2}} \\ \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$\theta_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

Soluzioni: $\left\{ \sqrt[5]{4\sqrt{2}}\, e^{i\theta_k} \;\middle|\; \theta_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \quad k = 0,1,2 \right\}$