Lezione 4

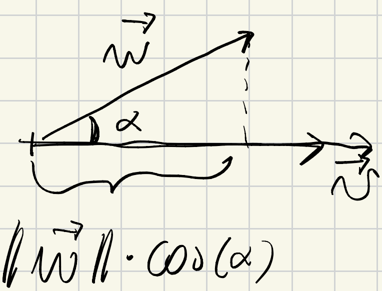
Esercizio Dimostrare che, dati 3 vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$,

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Utilizzando la definizione con coseno.

Oss. Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si ha

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos(\alpha) = \|\vec{v}\|\cdot\underbrace{(\|\vec{w}\|\cdot\cos(\alpha))}_{\text{proiezione di } \vec{w} \text{ lungo } \vec{v}}}$$



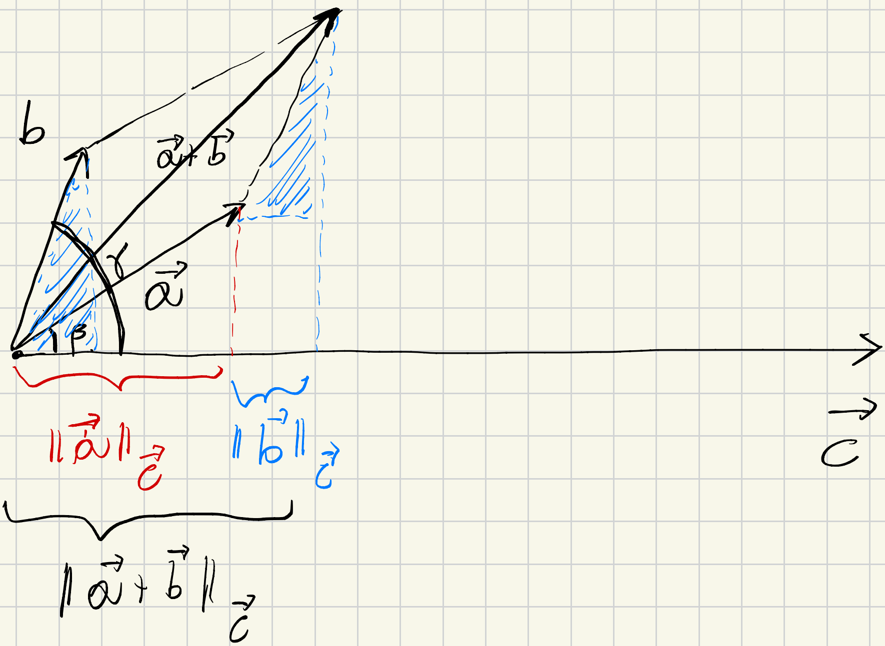
$\Downarrow$ denoto con $\|\vec{w}\|_{\vec{v}}$ questa proiezione:

$$\boxed{\begin{aligned}&\|\vec{w}\|_{\vec{v}} = \|\vec{w}\|\cdot\cos(\alpha).\\ &\text{Così: } \vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|_{\vec{v}}\end{aligned}} \quad (*)$$

Fatto questa osservazione, svolgo l'esercizio.

Noto che:

$$\boxed{\|\vec{a}+\vec{b}\|_{\vec{c}} = \|\vec{a}\|_{\vec{c}} + \|\vec{b}\|_{\vec{c}}} \quad (**)$$



Chiamo $a = \|\vec{a}\|$

$$a_{\vec{c}} = \|\vec{a}\|_{\vec{c}} = a\cos\beta$$

$$b = \|\vec{b}\|$$

$$b_{\vec{c}} = \|\vec{b}\|_{\vec{c}} = b\cos\gamma$$

Quindi, posto $c = \|\vec{c}\|$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \|\vec{a}+\vec{b}\|_{\vec{c}} \cdot c \quad (\text{è } (*))$$

prodotto scalare

prodotto di due lunghezze

$$= \left(\|\vec{a}\|_{\vec{c}} + \|\vec{b}\|_{\vec{c}}\right)\cdot c \quad (\text{è } (**))$$

sono numeri!

$$= \|\vec{a}\|_{\vec{c}} \cdot c + \|\vec{b}\|_{\vec{c}} \cdot c$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$$

è $(*)$

<u>Oss.</u> Ho dedotto la proprietà distributiva del prodotto scalare dalla proprietà distributiva del prodotto tra numeri (in $\mathbb{R}$) e per farlo ho usato le proiezioni.

Esercizio Trovare un vettore ortogonale a $(-1,2,5)$ in $\mathbb{R}^3$.

Perché $(x,y,z) \in \mathbb{R}$ sia ortogonale a $(-1,2,5)$ bisogna che l'angolo tra essi compreso sia $\pm\frac{\pi}{2}$, cioè il coseno dell'angolo tra essi compreso sia 0. Questo significa: il prodotto scalare di $(-1,2,5)$ con (x,y,z) è zero.

Cioè:

$$(-1,2,5)\cdot(x,y,z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -x+2y+5z=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2y+5z} \quad (\text{piano in } \mathbb{R}^3)$$

Ho infiniti vettori ortogonali a $(-1,2,5)$, uno per ciascuna scelta di y e z.

(•) $y=1,\ z=3 \Rightarrow x = 2\cdot1+5\cdot3 = 17$

$\Rightarrow (17,1,3)$ è ortogonale a $(-1,2,5)$.

(•) $y=0,\ z=1 \Rightarrow x = 2\cdot0+5\cdot1 = 5$

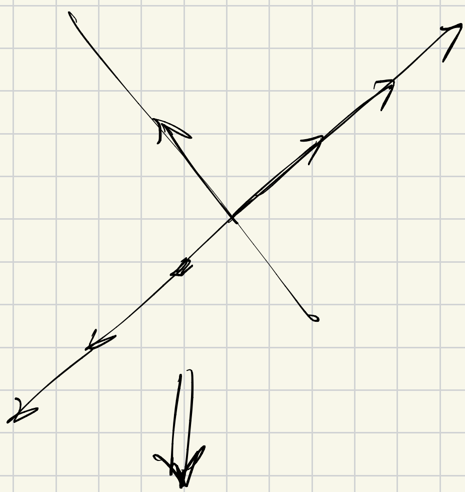
$\Rightarrow$ anche $(5, 0, 1)$ è ortogonale a $(-1, 2, 5)$.

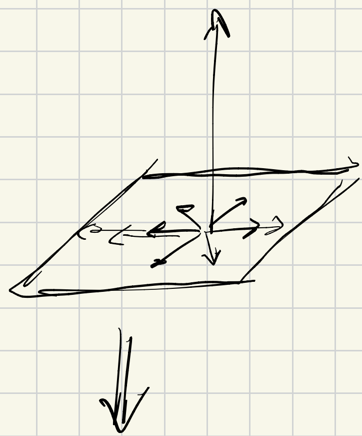
(•) Tutti i multipli di un vettore ortogonale sono anche ortogonali:

$$\lambda(5,0,1) = (5\lambda, 0, \lambda)$$

$$(5\lambda, 0, \lambda)\circ(-1, 2, 5) = 0.$$

<u>Oss</u>





Tutti i multipli di un vettore ortogonale ad un vettore dato sono ortogonali a quel vettore (sia in $\mathbb{R}^2$ che $\mathbb{R}^3$)

In $\mathbb{R}^3$, tutti i vettori di un piano sono ortogonali ad un vettore dato (ne ho infiniti che non sono multiplo l'uno dell'altro).

<u>Esercizio</u> Trovare tutti i vettori ortogonali (perpendicolari) a $(1,3)$ in $\mathbb{R}^2$.

L'equazione è (come nell'esercizio precedente, ma più facile perché siamo in $\mathbb{R}^2$)

$$(x,y)\cdot(1,3)=0 \implies x+3y=0.$$

$$\implies x=-3y.$$

Tutti i vettori ortogonali sono:

$$(-3t,\,t)$$

Scelgo $t=1$

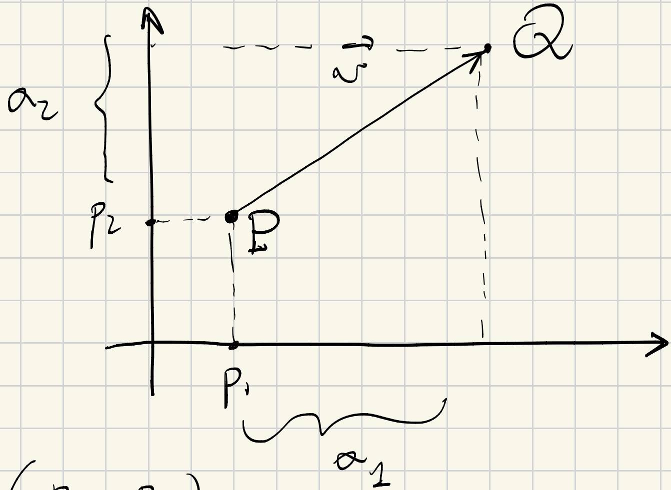
al variare di $t\in\mathbb{R}$.

Sono quindi tutti i multipli di $(-3,1)$.

<u>Oss.</u> Al punto $(0,0)$ è associato il <u>vettore nullo</u>, $\vec{0}$. Questo vettore ha la proprietà

$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}.$$

Operazioni tra punti e vettori



$P = (p_1, p_2)$

$\vec{v} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

Definisco, dato P e $\vec{v}$ il punto Q (che chiamo il traslato di P con $\vec{v}$) così:

$Q = P + \vec{v} = (p_1 + a_1, p_2 + a_2)$.

Scrivo anche

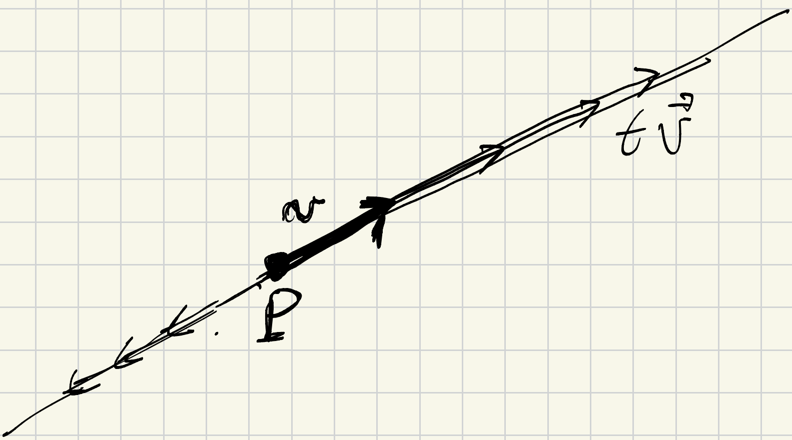
$\vec{v} = Q - P$

Rette di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Una retta di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ è l'insieme dei punti X (di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) che si scrivono come

$$X = P + t\vec{v}$$

per qualche punto P e un vettore $\vec{v} \neq (0,0)$, dove t è un numero in $\mathbb{R}$.



Rette in $\mathbb{R}^2$

$$P = (p_1, p_2)$$

$$\vec{v} = (a_1, a_2)$$

X è un punto sulla retta $r: P + t\vec{v}$ se e solo se

$$X = (x, y) = (p_1, p_2) + t(a_1, a_2)$$

per qualche t, cioè:

$$(x, y) = (p_1 + ta_1, p_2 + ta_2)$$

Cioè

$$\boxed{\begin{cases} x = p_1 + ta_1 \\ y = p_2 + ta_2 \end{cases}}$$

Equazioni parametriche di r.
$r: P + t\vec{v}$

Significa: voglio che le due condizioni siano contemporaneamente vere.

Si dicono parametriche perché dipendono da un parametro, nel nostro caso è t.

Eliminando il parametro ottengo le equazioni cartesiane di r.
Ricordo che $\vec{v} \neq (0,0)$, dunque almeno uno tra a_1 e a_2 è non zero.

Considero il caso in cui $a_1 \neq 0$.

Risolvo il sistema in questo caso:

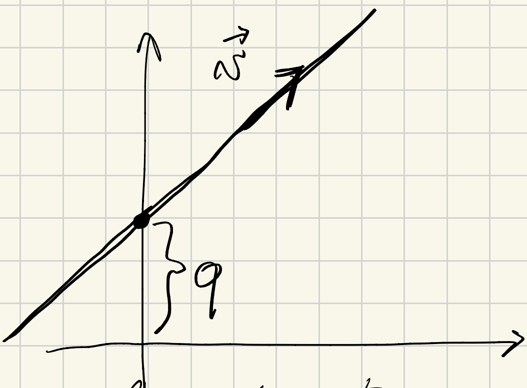
$$\begin{cases} x = p_1 + t a_1 \implies t = \frac{x}{a_1} - \frac{p_1}{a_1} \\ y = p_2 + t a_2 \end{cases}$$

$$\implies y = p_2 + \left(\frac{x}{a_1} - \frac{p_1}{a_1}\right) a_2$$

$$\implies y = \underbrace{\frac{a_2}{a_1}}_{m} x + \underbrace{p_2 - \frac{p_1 a_2}{a_1}}_{q}$$

$$\implies y = mx + q.$$

Equazione cartesiana di r se $a_1 \neq 0$



Se $a_1 = 0$, ho il sistema

$$\begin{cases} x = p_1 \\ y = p_2 + t a_2 \end{cases}$$

$$\boxed{x = p_1}$$

Eq. cartesiana di r se $a_1 = 0$.

Per tenere entrambe le espressioni in una sola equazione posso scrivere una retta generica come

$y = mx + q$
$x = p_1$

$$\boxed{r: ax + by + c = 0}$$

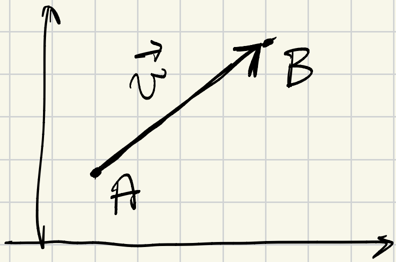
Equazione cartesiana di una retta generica r; ricordo che qui $(a, b) \neq (0, 0)$

Oss Se $b = 0$, ho $ax + c = 0 \Rightarrow x = p_1$
Se $b \neq 0$, ho $y = mx + q$.

Esempio Data la retta r di equazione cartesiana

$$r: ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

trovare il suo vettore direttore cioè il vettori $\vec{v}$ tali che $r: P + t\vec{v}$.

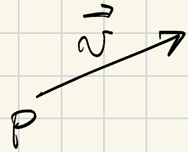


$\vec{v} = B - A$

Basta: trovare due punti A e B della retta e calcolare $B - A$

punto finale

estremo iniziale

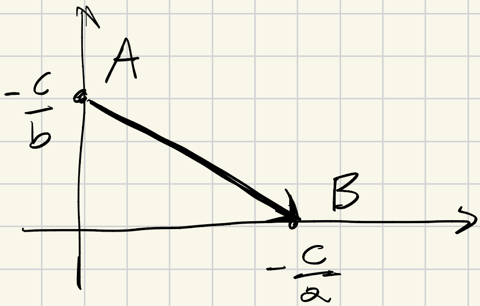
($Q = P + \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = Q - P$: )

Se ad esempio $a \neq 0$ e $b \neq 0$, posso scegliere come due punti della retta $r: ax + by + c = 0$ i due punti

$$A = \left(0, -\frac{c}{b}\right), \quad B = \left(-\frac{c}{a}, 0\right)$$

scelgo $x = 0$

scelgo $y = 0$



$$B - A = \left(-\frac{c}{a}, 0\right) - \left(0, -\frac{c}{b}\right) = \left(-\frac{c}{a}, \frac{c}{b}\right)$$

Assumo che $c \neq 0$ altrimenti $A = B$ e mi devo cercare un terzo punto C.

è il vettore direttore di r.

<u>Oss</u>. Nel caso precedente, $r: ax+by+c=0$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$, notare che il vettore direttore

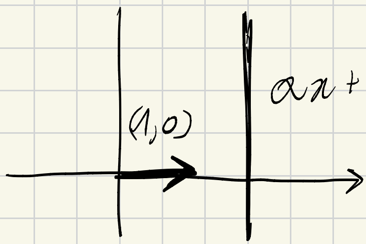
$$\left(-\frac{c}{a}, \frac{c}{b}\right)$$

è perpendicolare (ortogonale) al vettore formato dai coefficienti di x, y, cioè (a,b).

$$(a,b) \cdot \left(-\frac{c}{a}, \frac{c}{b}\right) = a \cdot \left(-\frac{c}{a}\right) + b \cdot \left(\frac{c}{b}\right) = -c + c = 0.$$

Quindi, un altro modo per trovare il vettore direttore è calcolare l'ortogonale a (a,b).

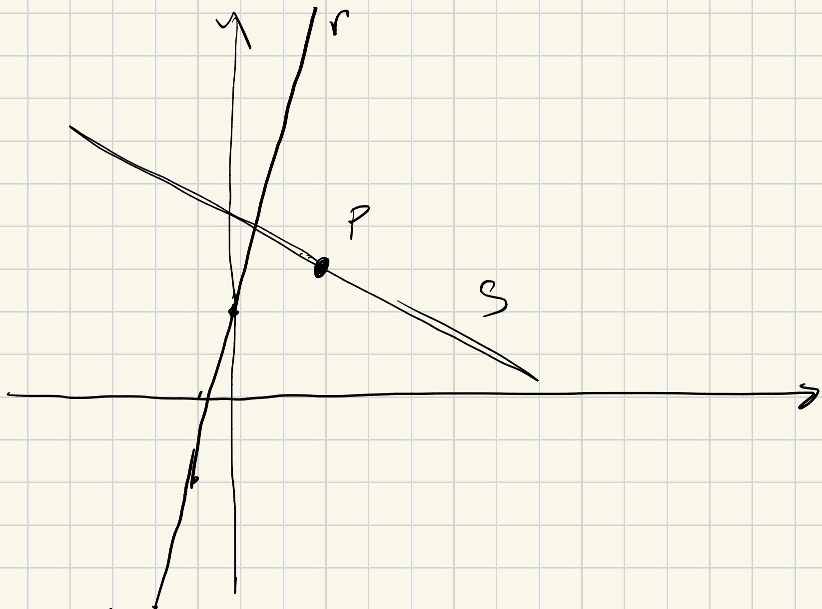
<u>Esercizio</u>. Se $a=0$, mostrare che $(0,1)$ è ortogonale alla retta $by+c=0$.
Se invece $b=0$, mostrare che $(1,0)$ è ortogonale alla retta $ax+c=0$



Qui dico che un <u>vettore $\vec{v}$ è ortogonale ad una retta</u> r se $\vec{v}$ è ortogonale al vettore direttore di r.

<u>Esercizio</u>: Dato il punto $P=(2,3)$ e la retta r di equazione cartesiana $r: 4x-y+2=0$, trovare la retta s che passi per P e sia

ortogonali a r (dico che due rette sono ortogonali tra loro se lo sono i loro vettore direttore).



r : $y = 4x + 2 \iff 4x - y + 2 = 0$.

Un vettore perpendicolare al vettore direttore di r è il vettore $(4, -1)$ (visto prima)
Quindi la retta cercata ha equazione parametrica

$(4t, -t)$

$$X = P + t(4,-1)$$
$$= (2,3) + t(4,-1) \Rightarrow (x,y) = (2+4t, 3-t)$$

$$\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 3-t \end{cases} \Rightarrow \left\{ \; t = 3-y \right.$$

$$\Rightarrow \quad x = 2+4(3-y)$$

$$\Rightarrow \quad x = 2+12-4y$$

$$\Rightarrow \quad x+4y-14 = 0$$