Lezione 2

giovedì 2 ottobre 2025 14:30

Teorema. Se $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono linearmente dipendenti allora uno di essi "dipende" dagli altri, cioè si può scrivere come combinazione lineare degli altri.

Dim. Ci deve essere una combinazione lineare

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r = \vec{0}$$

con qualche $a_i \neq 0$.

$$a_i v_i = -a_1 v_1 - a_2 v_2 \cdots - a_r v_r$$

divido ambo i membri per a_i

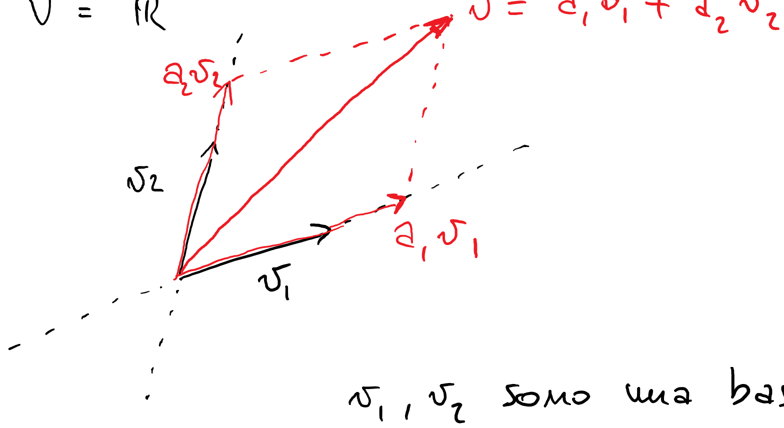
$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \frac{a_2}{a_i} v_2 \cdots - \frac{a_r}{a_i} v_r$$

quindi v_i si può scrivere come una combinazione lineare degli altri vettori.

Def. Una base di uno spazio vettoriale è un insieme di vettori che siano generatori e anche linearmente indipendenti.

Teorema. Tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di vettori! Questo numero è la dimensione di V.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2$



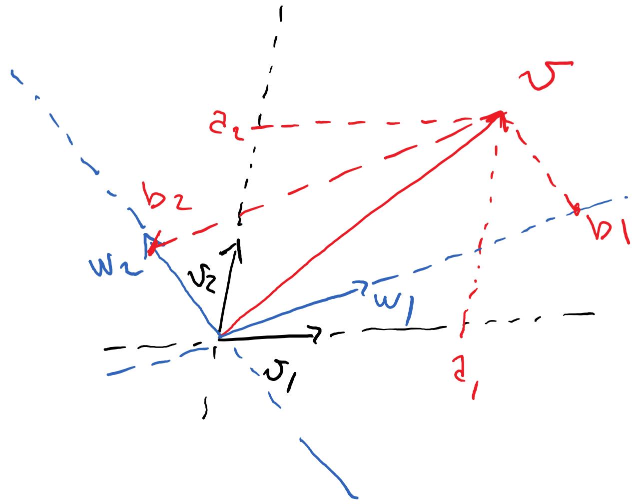
v_1, v_2 sono una base di $\mathbb{R}^2$

$$v = \underbrace{a_1}\, v_1 + \underbrace{a_2}\, v_2$$

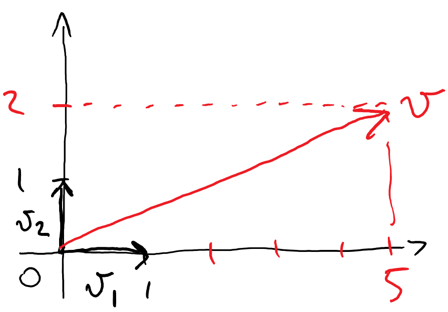
sono le coordinate di v nella base v_1, v_2

sono le coord. di v nella base w_1, w_2

$$= b_1 w_1 + b_2 w_2$$



Esercizio. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e $v = (5, 2)$

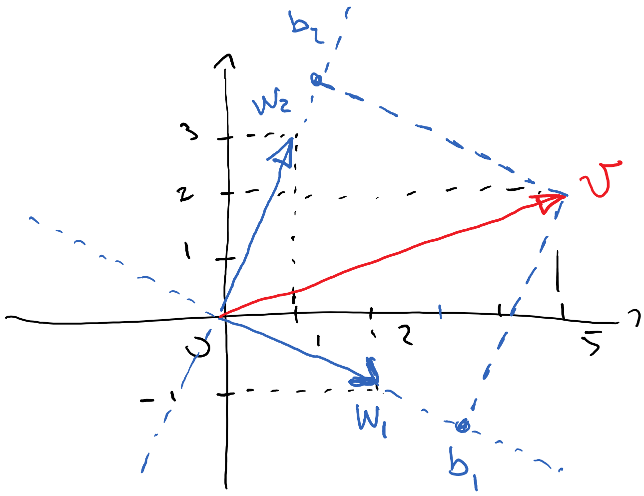


$$\underbrace{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base canonica}}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

Ora prendiamo una base formata dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Trovare le coordinate di v nella base w_1, w_2.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5 = 2b_1 + b_2 \\ 2 = -b_1 + 3b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 5 - 2b_1 \\ 2 = -b_1 + 15 - 6b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_2 = 5 - 2b_1 \\ 7b_1 = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_2 = 5 - \dfrac{26}{7} = \dots \\ b_1 = \dfrac{13}{7} \end{cases}$$

Def. La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Come posso costruire una base di V?

Prendo $v_1 \neq \vec{0}$. Ho trovato una base?

Se sì ho finito.

Se no, prendo v_2 che sia linearmente indipendente da v_1.

v_1 e v_2 sono una base?

Se sì ho finito.

Se no, prendo v_3 che sia linearmente indipendente da v_1 e v_2.

ecc.

Def. Sia V uno spazio vettoriale.

Un sottospazio vettoriale è un sottoinsieme $W \subset V$ che sia anche uno spazio vettoriale per le operazioni definite nello spazio vettoriale V.

Esercizio (esame del 18 settembre 2024)

Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato da

Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato da

$u_1 = (1, 0, -1, 1)$

$u_2 = (2, 1, -1, 3)$

$u_3 = (1, 2, 1, 3)$

Determinare la dimensione di U e trovare una base di U.

Soluzione.

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ sono un insieme di generatori di U
(è scritto nel testo dell'esercizio)

Devo controllare se u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti.

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = \vec{0}$$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + 2a_3 = 0 \\ -a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - 4a_3 + a_3 = 0 \\ a_2 = -2a_3 \\ -a_1 + 2a_3 + a_3 = 0 \\ a_1 - 6a_3 + 3a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3a_3 \\ a_2 = -2a_3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

ci sono ∞ soluzioni per ogni valore di a_3

Quindi u_1, u_2, u_3 sono lineramente dipendenti

$a_3 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = -2$

$$3u_1 - 2u_2 + u_3 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad u_3 = -3u_1 + 2u_2$$

Quindi devo eliminare u_3!

$\{ u_1, u_2, \cancel{u_3} \}$ generano U

$\{ u_1, u_2 \}$ sono linearmente indipendenti ?

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = \vec{0}$$

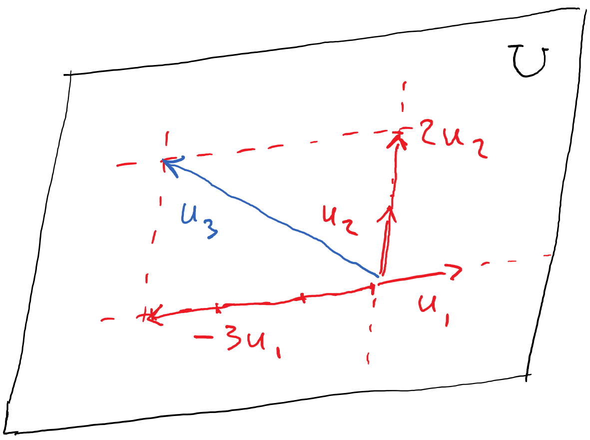
eccetera

Si ottiene $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$

Quindi u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti

quindi sono una base di U.

Quindi $\dim U = 2$.



U è un piano ($\dim U = 2$) dentro $\mathbb{R}^4$!!