Lezione 3

Tutto si risolve allo stesso modo in $\mathbb{R}^3$:

- Somma di vettori:

$$\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$$
$$\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$$

Definisco

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2).$$

Esercizio: Fare il disegno del parallelogramma in $\mathbb{R}^3$.

numero reale

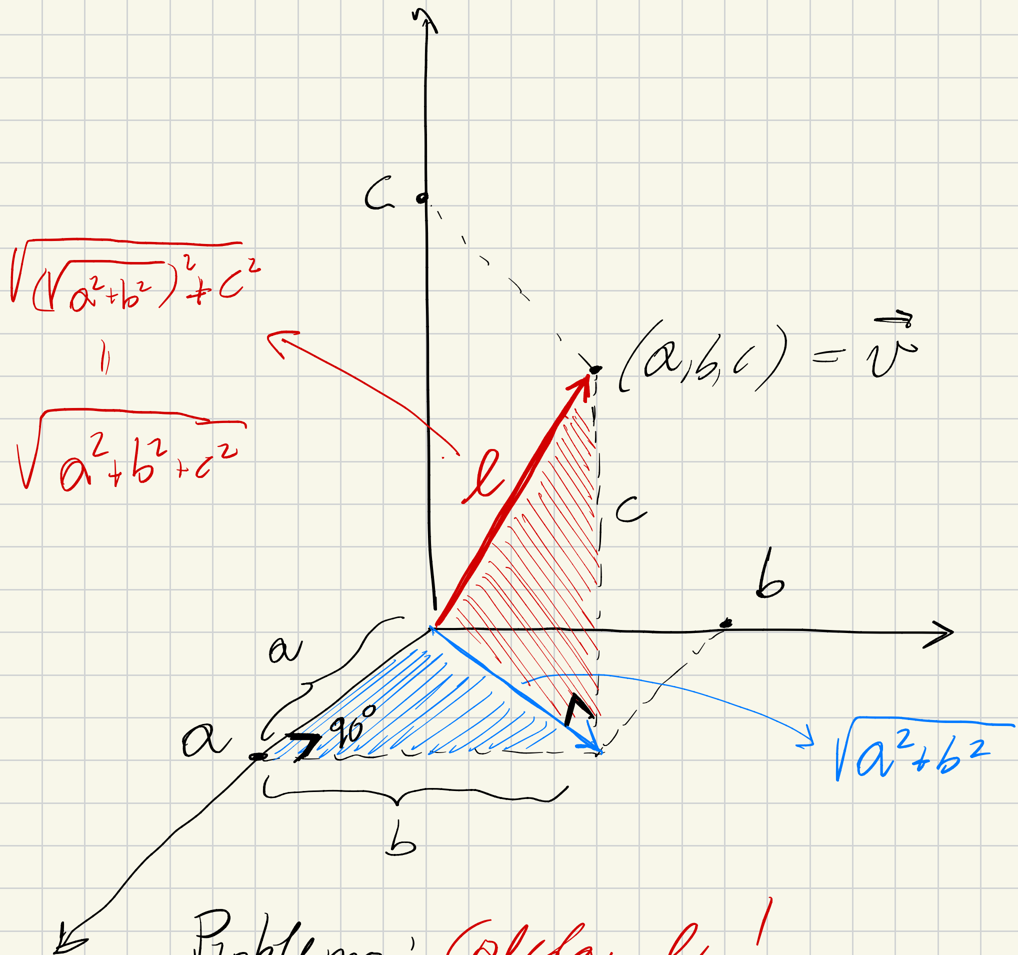
- Prodotto di uno scalare per un vettore:

$$k \in \mathbb{R}$$
$$\vec{v} = (a, b, c)$$
$$k\vec{v} = (ka, kb, kc).$$

- Modulo $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\vec{v} = (a, b, c)$.

(Teorema di Pitagora)

Esercizio: giustifichiamo la formula di $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ con il T. di Pitagora.



Problema: Calcolare l !

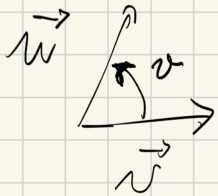
Prodotto scalare di due vettori in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

Il risultato è un numero, cioè uno scalare.
$\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori (entrambi in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$)

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\vartheta)$$

prodotto scalare

ϑ = angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$, in senso antiorario



Esercizio

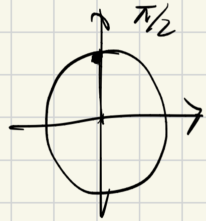
Prendo due vettori $\vec{v} = (3,2)$, $\vec{w} = (5,4)$ di $\mathbb{R}^2$. Voglio calcolare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e $\cos(\vartheta)$.

$$\vec{v} = (3,2) = 3(1,0) + 2 \cdot (0,1)$$

$$\vec{w} = (5,4) = 5 \cdot (1,0) + 4 \cdot (0,1)$$

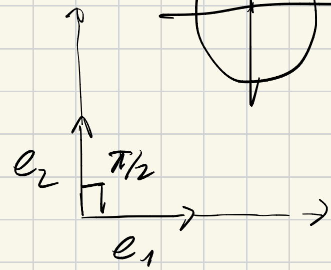
Per comodità, indico con

$\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$.



Così che

$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$
$$\vec{w} = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 .$$



Noto che
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \cos 0 = 1. \end{array}} \quad (*)$$

Faccio il calcolo:

$$(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)\cdot(5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2) =$$
$$= (3\vec{e}_1)\cdot(5\vec{e}_1) + (3\vec{e}_1)\cdot(4\vec{e}_2) + 2(\vec{e}_2)\cdot(5\vec{e}_1)$$
$$+ (2\vec{e}_2)\cdot(4\vec{e}_2) =$$
$$= 15\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + \underbrace{\cancel{12\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2}}_{\cos(\frac{\pi}{2})=0} + \underbrace{\cancel{10\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1}}_{\substack{=0. \\ \cos(-\frac{\pi}{2})=0}} + 8\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2$$

Uso (*) e ottengo

$$= 15 + 8 = 23.$$

Perciò

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = 23.$$

D'altra parte

$\|\vec{v}\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

$\|\vec{v}\cdot\vec{w}\| = 23$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \|v\|\cdot\|w\|\cos(\vartheta)$

$\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$

Perciò $\cos(\vartheta) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}$

$= \dfrac{23}{\sqrt{41\cdot 13}}$

$\vartheta = \arccos\left(\dfrac{23}{\sqrt{41\cdot 13}}\right).$

Oss Per il calcolo ho utilizzato il fatto che

$(\bullet)\ (\vec{v}_1+\vec{v}_2)\cdot(\vec{w}_1+\vec{w}_2) =$

$= \vec{v}_1\cdot\vec{w}_1 + \vec{v}_2\cdot\vec{w}_2 + \vec{v}_1\cdot\vec{w}_2 + \vec{v}_2\cdot\vec{w}_2$

e che

prodotto scalare

$(\circ)\ (\lambda\cdot\vec{v})\cdot(\vec{w}) = \lambda\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$

prodotto di uno scalare per un vettore.

(c) $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$ $\left(\cos(\vartheta)=\cos(-\vartheta)\right)$.

Esercizio Dimostrare queste formule con la trigonometria.

— o —

In coordinate, il prodotto scalare si calcola così:

In $\mathbb{R}^2$: $\vec{v}=(a_1,b_1)$, $\vec{w}=(a_2,b_2)$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = a_1a_2+b_1b_2.$$

Esercizio: $\boxed{\text{Imitare}}$ quanto fatto nell'esempio $\vec{v}=(3,2)$, $\vec{w}=(5,4)$ per mostrare la formula generale.

(i.e. $\vec{v}=a_1\vec{e}_1+b_1\vec{e}_2$, $\vec{w}=a_2\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2$ ....)

In $\mathbb{R}^3$ vale la stessa regola:

$\vec{v}=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{w}=(a_2,b_2,c_2)$,

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = a_1a_2+b_1\cdot b_2+c_1\cdot c_2.}$$

Per dimostrarlo, uso la stessa tecnica

per $\mathbb{R}^3$, e pongo

$$\vec{e}_1 = (1,0,0), \quad \vec{e}_2 = (0,1,0), \quad \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

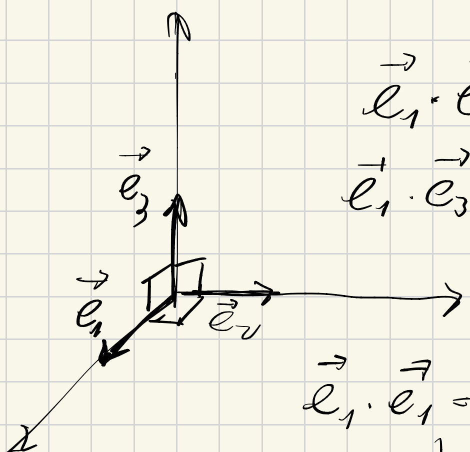
$$\vec{\imath} = \vec{e}_1, \quad \vec{\jmath} = \vec{e}_2, \quad \vec{k} = \vec{e}_3$$

e scrivo:

$$\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + b_1 \vec{e}_2 + c_1 \vec{e}_3$$

$$\vec{w} = a_2 e_1 + b_2 \vec{e}_2 + c_2 \vec{e}_3$$

e uso che gli e_i sono perpendicolari:



$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \underbrace{\|\vec{e}_1\|}_{1} \underbrace{\|\vec{e}_1\|}_{1} \underbrace{\cos(0)}_{1} = 1$$

$$\|\vec{e}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$$

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$$

Notazione $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sono detti "versori"

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$

$\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, $\qquad \|\vec{v}\| = |\vec{v}|$

$\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

In generale, in $\mathbb{R}^n$, ho una nozione analoga

$\vec{v} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{w} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

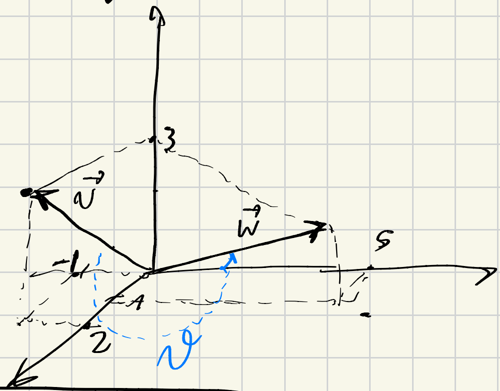
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Simbolo di sommatoria: $\sum_{i=1}^{n}$ significa sommare per l'indice i tra 1 e n.

Esercizio Calcolare l'angolo tra i due vettori di $\mathbb{R}^3$

$\vec{v} = (2, -1, 3)$

$\vec{w} = (1, 5, 2)$



Sappiamo:

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\vartheta) \quad (*)}$$

Calcolo i pezzi che mi servono:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (2, -1, 3) \cdot (1, 5, 2) = 2 - 5 + 6 = 3$$

(regola: $(\overset{\times}{a_1}, \tilde{b}_1, \dot{c}_1) \cdot (\overset{\times}{a_2}, \tilde{b}_2, \dot{c}_2) = \overset{\times}{a_1 a_2} + \widetilde{b_1 b_2} + \dot{c_1 c_2}$)

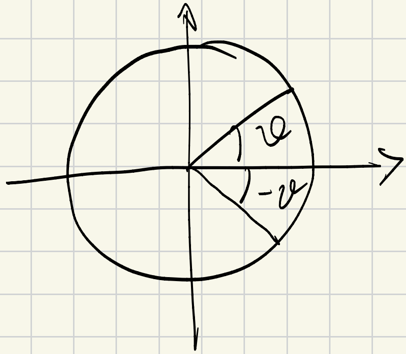
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(1)^2 + (5)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+25+4} = \sqrt{30}$$

Ricavo il

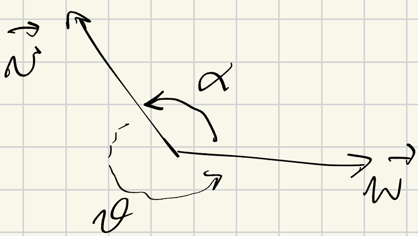
uso $(*)$

$$\cos(\vartheta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{3}{\sqrt{14 \cdot 30}}$$



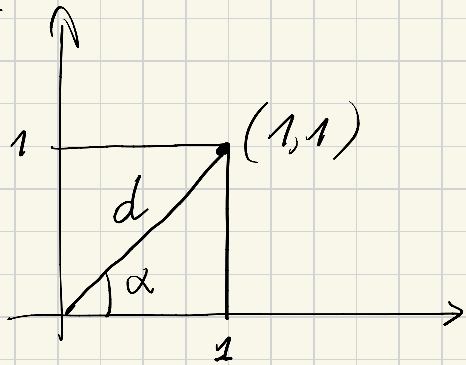
$$\cos(\vartheta) = \cos(-\vartheta)$$

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{16 \cdot 36}}\right)$$ calcolato con la calcolatrice restituisce



$$\vartheta = 2\pi - \alpha.$$

<u>Esempio</u> Considerare il quadrato di lato 1



Calcolare d = diagonale e α = angolo che forma la diagonale con l'asse x.

$$d = \|(1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Per calcolare l'angolo, faccio come prima: calcolo il prodotto scalare tra $(1,1)$ e $(1,0) = \vec{e}_1$

$$(1,0)\cdot(1,1) = 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1.$$

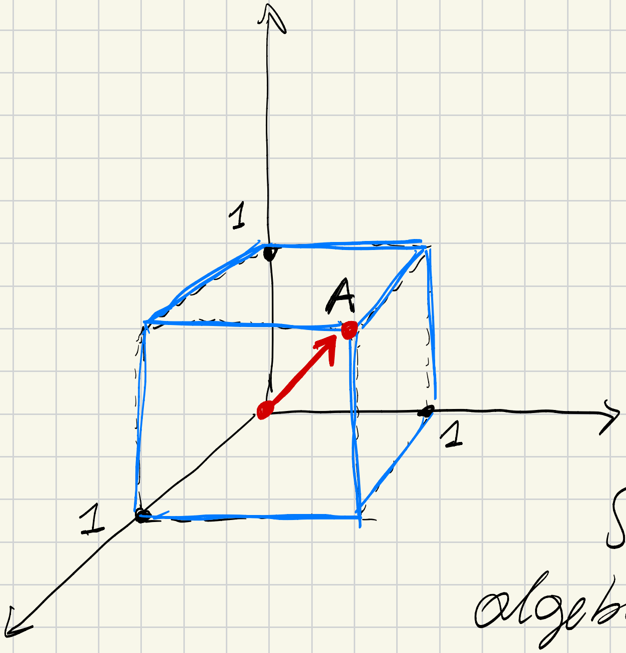
$$\|(1,0)\| = 1$$

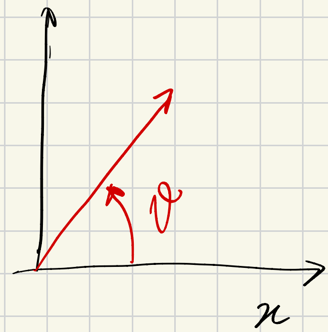
$$\|(1,1)\| = \sqrt{2}.$$

Perciò $$\cos(\alpha) = \frac{(1,0)\cdot(1,1)}{\|(1,0)\|\cdot\|(1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Perciò $\alpha = \pi/4$.

<u>Esercizio</u> Come prima, ma per il cubo: Calcolare la diagonale del cubo di lato 1 e l'angolo che forma con l'asse x.





Stesso procedimento algebrico dell'es. precedente:

Il vertice A ha coordinate (1,1,1).
Faccio il prodotto scalare con
$\vec{e}_1 = (1,0,0)$.

$$(\overset{\times}{1},\tilde{0},\dot{0})\cdot(\overset{\times}{1},\tilde{1},\dot{1}) = \overset{\times}{1}+\tilde{0}+\dot{0} = 1$$

$$\|(1,0,0)\| = \|\vec{e}_1\| = \sqrt{1+0+0} = 1$$

$$\|(1,1,1)\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Dalla (*): $\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\vartheta$

ricavo

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

<u>Es.</u> Stessa cosa in $\mathbb{R}^4$. Diagonale e angolo dell'ipercubo in $\mathbb{R}^4$

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$$

Come prima

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{v} = 1$$

$$\|\vec{e}_1\| = 1$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1+1+1} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{1}{2} \quad \left(= \frac{\vec{e}_1\cdot\vec{v}}{\|\vec{e}_1\|\cdot\|\vec{v}\|}\right)$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{3} \quad (= 60^\circ).$$