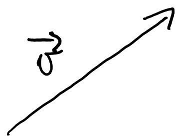
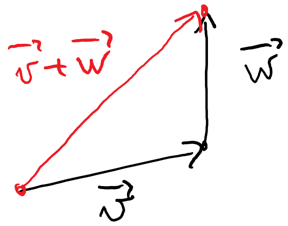
Lezione 1

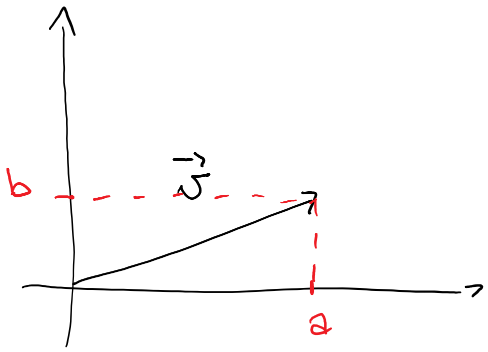
martedì 30 settembre 2025 14:30

Vettore :



Somma di vettori





$$\vec{v} \longleftrightarrow (a, b)$$

$$\vec{w} \longleftrightarrow (c, d)$$

$$\vec{v}+\vec{w} \longleftrightarrow (a+c,\ b+d)$$

Prodotto fra un numero (scalare) e un vettore :

$$a \in \mathbb{R}, \quad \vec{v} = (v_1, v_2)$$

$$a\vec{v} = (a v_1, a v_2)$$

Definizione .

$$\mathbb{R}^n = \{ \underbrace{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)}_{\vec{v}} \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

Def. Uno spazio vettoriale è un insieme dove sono definite due operazioni :

$\vec{v}, \vec{w} \xrightarrow{+} \vec{v} + \vec{w}$

a è un numero, $\vec{v} \longrightarrow a\vec{v}$

(le operazioni soddisfano una serie di proprietà).

Esempio: Sia V l'insieme dei polinomi del tipo $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Oppure l'insieme delle funzioni ($\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, ...)

Sia V uno spazio vettoriale, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n}_{\text{combinazione lineare}}$$

Def. I vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono un insieme di generatori se per ogni vettore $v \in V$ si ha

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = (1, -1, 0)$ $\quad v_2 = (-2, 3, 0)$

Sono un insieme di generatori?

Sono un insieme di generatori?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 \\ -a_1 + 3a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

non si può ottenere come combinazione lineare di v_1 e v_2

Quindi v_1 e v_2 non sono generatori di $\mathbb{R}^3$.

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$

Sono un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sì, sono un insieme di generatori.

Def. $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_r v_r = \vec{0}$$

I vettori sono linearmente indipendenti se l'unica possibilità è che $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_r = 0$.

Altrimenti i vettori sono linearmente dipendenti.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (2, -1)$ $v_2 = (1, 1)$ $v_3 = (1, 4)$

$v_1 = (2, -1) \quad v_2 = (1, 1) \quad v_3 = (1, 4)$

Sono dipendenti o indipendenti?

$$a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 + 4a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -2a_1 - a_3 \\ -a_1 - 2a_1 - a_3 + 4a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -2a_1 - a_3 \\ -3a_1 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -3a_1 \\ a_3 = a_1 \end{cases}$$

ci sono infinite soluzioni per ogni a_1

Quindi v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

Verifica: $a_1 = 1, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

cioè $v_1 = 3v_2 - v_3$.

Esercizio:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti o indipendenti?

v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti o indipendenti?