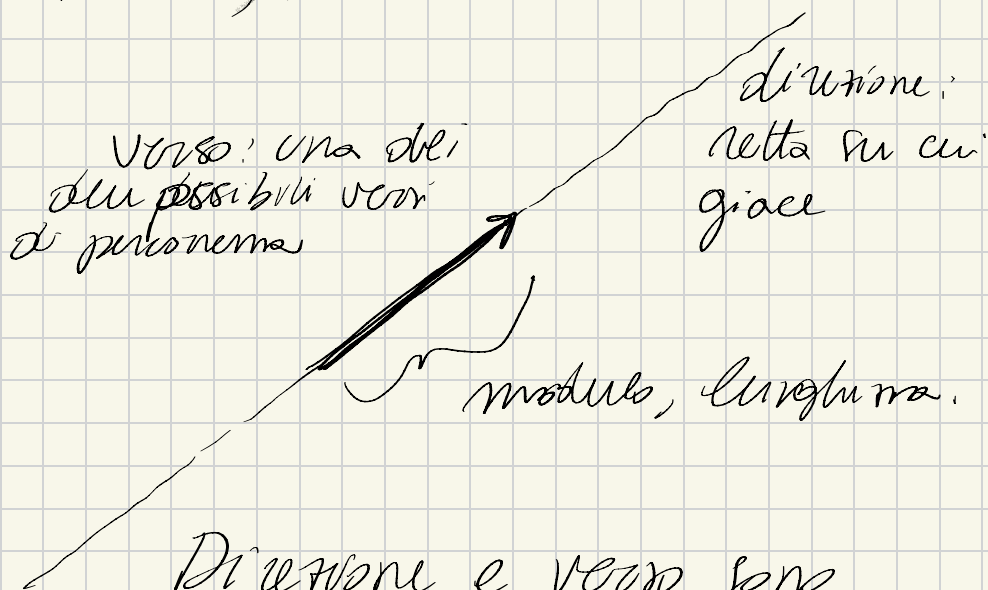


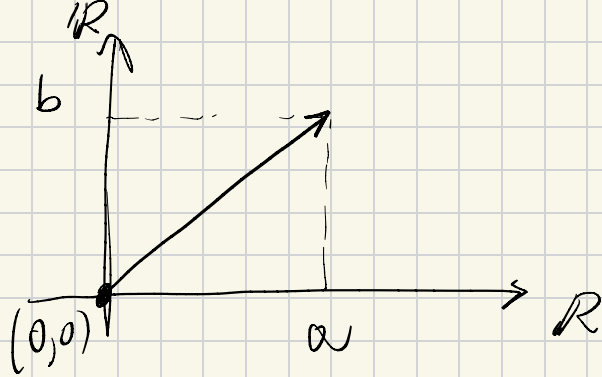
Lezione 2

Per il momento, ci occupiamo di vettori di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Un vettore è un oggetto individuato da tre caratteristiche: modulo, direzione, verso.



Direzione e verso sono informazioni spaziali mentre il modulo è un'informazione numerica.
Notare che i vettori del piano sono in biiezione con $\mathbb{R}^2$.

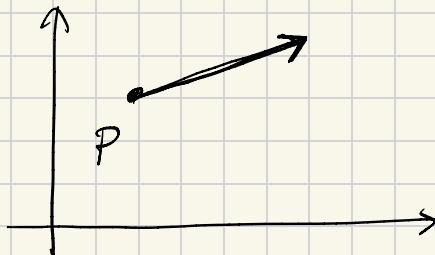


$\{ \text{vettori del piano} \} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{Coppie ordinate di numeri reali} \} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 $\parallel$
 $\mathbb{R}^2$
funzione biettiva

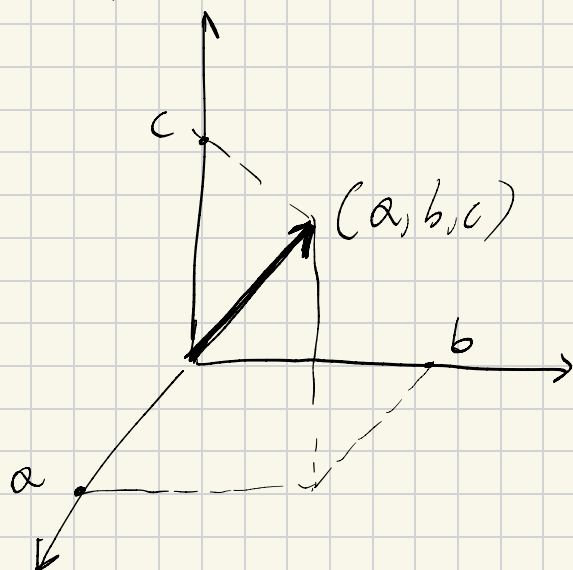
ottenuta congiungendo un pto del piano
 all'origine del sistema cartesiano.

Oss. Tutti i vettori partono da zero.

— Un vettore applicato e' una coppia
 formata da un vettore e un punto



Nello spazio tridimensionale:

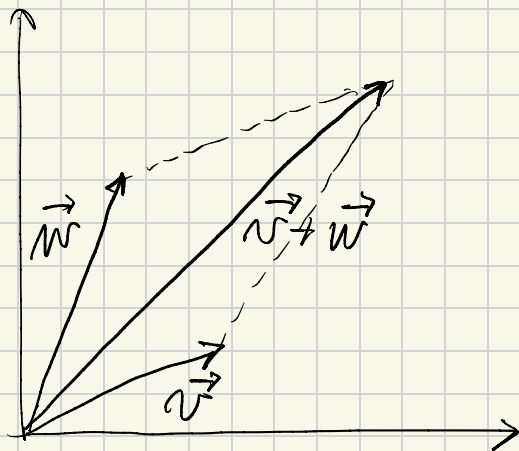


Es. Non sto dicendo che i
punti sono vettori. So solo dicendo che
posso rappresentare i vettori, che sono
oggetti complessi dotati di direzione,
verso e modulo, associando in modo
univoco un punto a ciascun vettore,
ponendo uno degli estremi del vettore in
(0,0). $\hookrightarrow$ quello da cui parte il verso
del vettore.

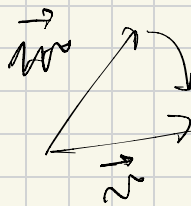
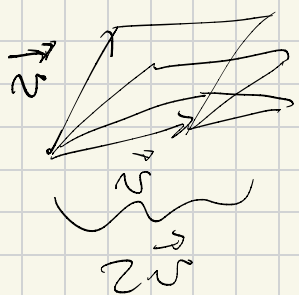
Es. Indico i vettori con $\vec{v}, \vec{w}, \dots$

Operazioni con i vettori di $\mathbb{R}^2$

Somma: Regola del parallelogramma



Nota che $\vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v}$

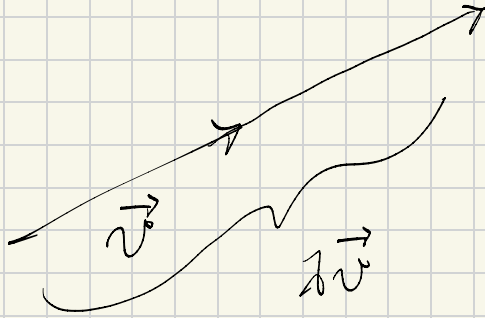


Sintomo
di "numero"
↑ cioè
un numero $\mathbb{R}$.

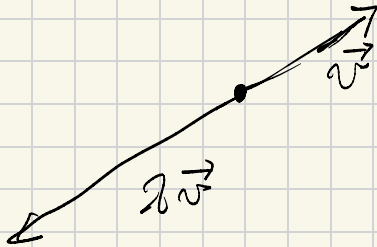
Prodotto di un vettore per uno scalare

Se $\lambda > 0$ è uno scalare (cioè: $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$)
e $\vec{v}$ è un vettore, $\lambda \vec{v}$ è il vettore che

ha modulo $\lambda \|\vec{v}\|$, stessa direzione e stesso verso di $\vec{v}$
 (cioè la sua lunghezza)
 modulo di $\vec{v}$



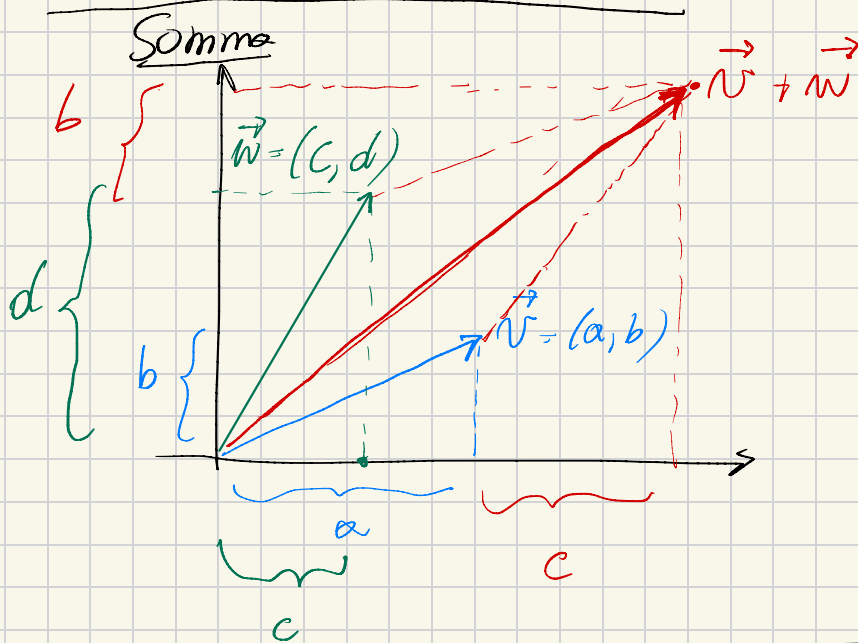
Se $\lambda < 0$, $\lambda \vec{v}$ è il vettore di
 modulo $|\lambda| \|\vec{v}\| = -\lambda \cdot \|\vec{v}\|$,
 stessa direzione di $\vec{v}$, ma verso opposto



Sempre, il modulo di $\lambda \vec{v}$ è $|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$
 (cioè $\lambda > 0$, $\lambda < 0$)
 $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$

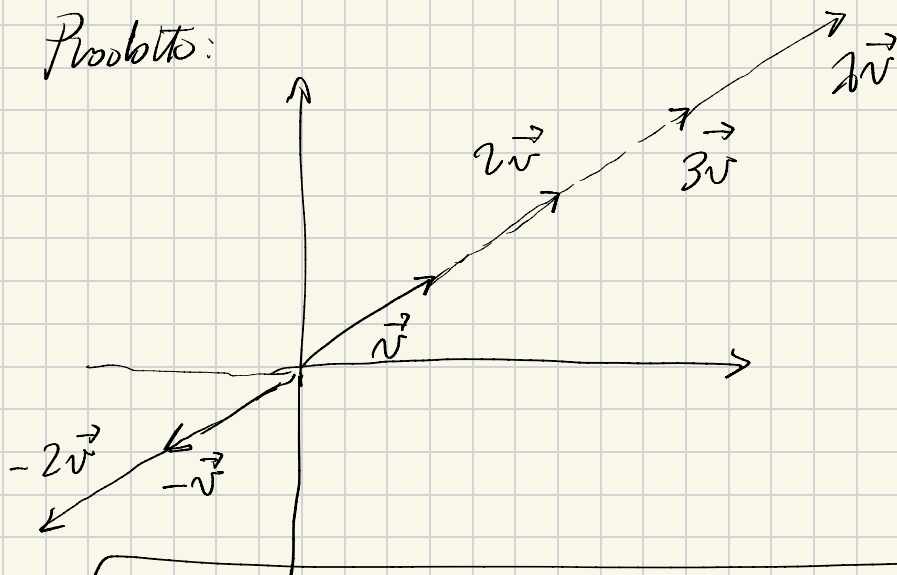
Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$: insieme dei vettori del piano con queste due operazioni:
Somma di vettori tramite regola del parallelogramma, e moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

In coordinate cartesiane:



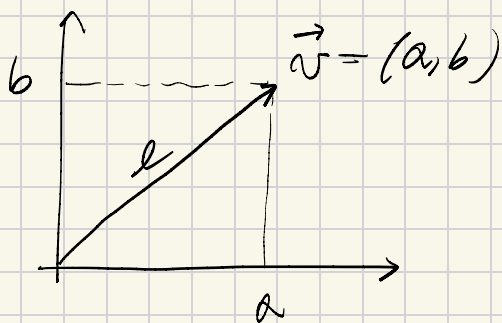
$$\vec{u} + \vec{w} = (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d).$$

Problema:



$$\text{Se } \vec{v} = (a, b), \quad 2\vec{v} = (2a, 2b).$$

Modulo di un vettore di $\mathbb{R}^2$

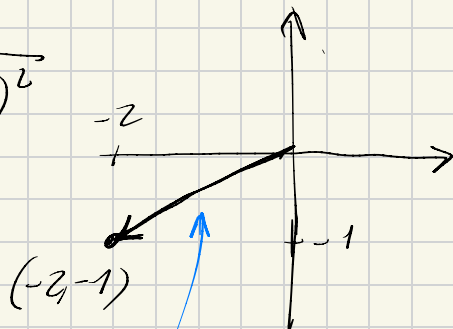


$\|\vec{v}\|$ si ottiene dal Teorema di Pitagora:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Qst. Questo vale sempre, cioè anche per vettori che non stanno nel primo quadrante

$$\begin{aligned}\|(-2, -1)\| &= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} \\ &\downarrow \\ &= \sqrt{4+1} \\ &\downarrow \\ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$



la lunghezza è sempre $\sqrt{5}$, cioè non esiste un concetto di "lunghezza negativa".

Es. Dato $\vec{v} = (a, b)$ e $k \in \mathbb{R}$, calcolando $\|k\vec{v}\|$ usando le coordinate

$$\begin{aligned}\|k\vec{v}\| &= \|k \cdot (a, b)\| \\ &= \|(ka, kb)\| \\ &= \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} \\ &= \sqrt{k^2 a^2 + k^2 b^2} \\ &= \sqrt{k^2 (a^2 + b^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |k| \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= |k| \|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\|k \vec{v}\| = |k| \cdot \|\vec{v}\|$$

moltiplicazione tra due
numeri reali,
entrambi ≥ 0 .