

Lesson 1

Insiemi numerici

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} : \text{naturali}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} : \text{interi}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} : \text{razionali}$$

$$\vdash \left\{ 0, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{10}{1}, \dots \right\}$$

contenuto



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

$$m \mapsto \frac{m}{1}$$

$$\frac{10}{1}$$

Equazioni di I grado (in $\mathbb{Q}$)

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{Q}, \quad a \neq 0$$

$$ax + \cancel{b} - \cancel{b} = -b$$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a} : \text{Soluzione.}$$

x : incognita
appartiene

Se $a = 0$, ho un'espressione del tipo
 $0 \cdot x = b$

Se $b = 0$, $0 \cdot x = 0$ ha infinite soluzioni;
cioè tutti gli $x \in \mathbb{Q}$

Se $b \neq 0$, non ci sono soluzioni.

Equazioni di II grado

Ci sono equazioni di II grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con coefficienti a, b, c in $\mathbb{Q}$ che
non hanno soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Esempio: $x^2 - 2 = 0$ non ha
soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Infatti: se avesse una soluzione in $\mathbb{Q}$,
sarebbe $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$.
Posso supporre che m ed n non abbiano
divisori comuni, altrimenti li semplifico.

$$\frac{m}{n} = \frac{m' \cdot d}{n' \cdot d} = \frac{m'}{n'} \quad \text{Implication}$$

Quindi l'equazione: $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$

Soultion:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = \frac{2n^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow m^2 = 2n^2$$

Perché m è pari. Perché $m = 2 \cdot k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Sostituisco

$$m^2 = 2n^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 2n^2$$

$$\Rightarrow 2n^2 = 4k^2$$

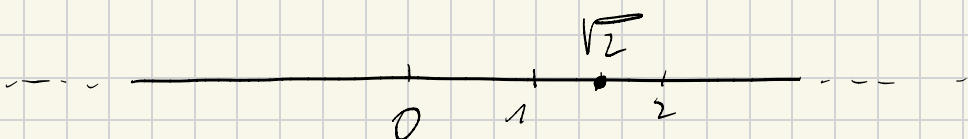
$$\Rightarrow n^2 = 2k^2$$

Perché se sono entrambi pari hanno un divisore 2 in comune

$\Rightarrow$ anche n è pari; contraddizione che ha origine dall'aver supposto che x fosse in $\mathbb{Q}$

Quindi, non esiste nessun numero di $\mathbb{Q}$ il cui quadrato è 2.

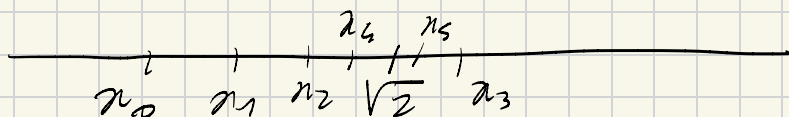
Per risolvere questo problema, introduciamo i numeri reali, "tappando i buchi lasciati da $\mathbb{Q}$ sulla retta".



$\sqrt{2}$ può essere approssimato da numeri razionali, cioè possiamo trovare per ogni intero n , un numero $x_n \in \mathbb{Q}$ t.c.

$$|(x_n)^2 - 2| < 10^{-n}$$

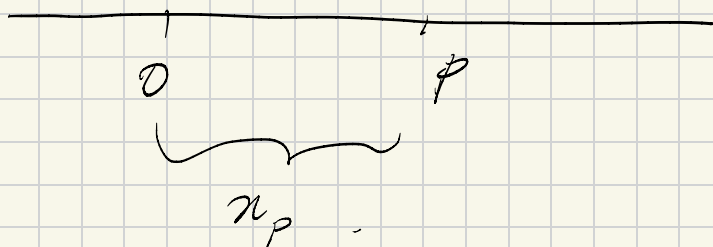
$\sqrt{2}$ è identificato con questa successione di numeri x_n .



I punti p della retta sono i numeri reali, che indichiamo con $\mathbb{R}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{punti della} \\ \text{retta} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{numeri real-} \\ \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$p \longmapsto x_p = \text{distanza di } p \text{ da } 0$$



Nonostante la nostra costruzione di $\mathbb{R}$, che ci permette di risolvere equazioni non risolubili in $\mathbb{Q}$, rimangono delle equazioni non risolubili in $\mathbb{R}$. Ad esempio $x^2 = -1$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$. Per avere

delle soluzioni, introdurremo (tra qualche lezione) l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Es. Ricavare la formula risolutiva dell'eq. di II grado.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R} \\ a \neq 0.$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{2ba}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se voglio che ci sia soluzione, deve essere $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Soluzioni:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se $\Delta > 0$, x_1 e x_2 sono distinte.

Se $\Delta = 0$, $x_1 = x_2$: due soluzioni coincidenti.

Se $\Delta < 0$, nessuna soluzione in $\mathbb{R}$.

— • —

Oss. Il simbolo " $\leftrightarrow$ " si legge
"corrispondenza biunivoca".

In generale: a A, B insieme

$f: A \rightarrow B$ funzione è una regola
che associa ad ogni
elemento di A uno ed
un solo elemento di B .

$$a \mapsto f(a)$$

Una funzione si dice iniettiva se ad elementi
distinti corrispondono immagini distinte:

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

(cioè: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$).

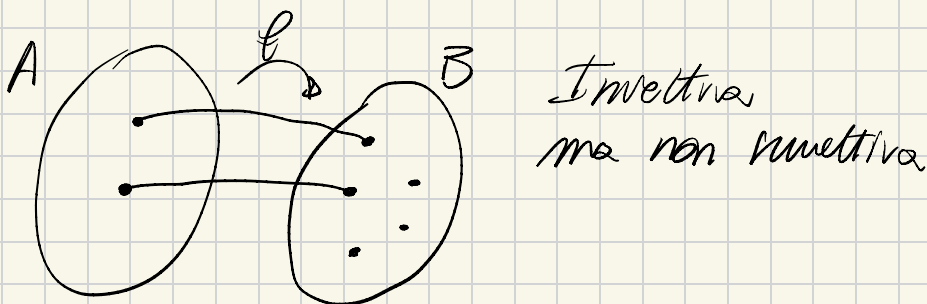
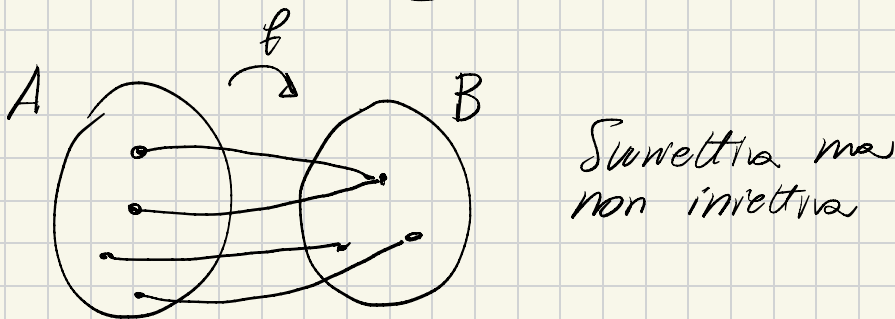
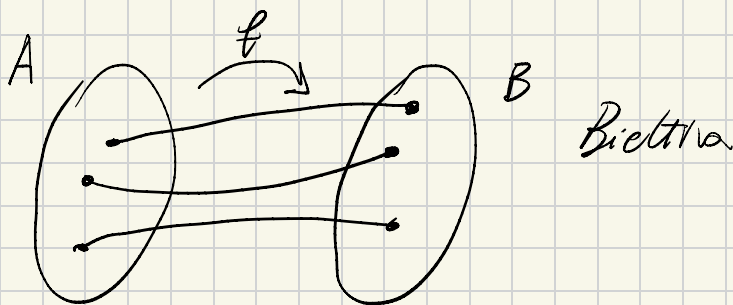
Diciamo che f è suriettiva se ogni elemento

b di B e' immagine di almeno un elemento di A , in simboli:

$$\forall b \in B, \exists a \in A \mid f(a) = b$$

↑ ↑ ↑
 per ogni appartenenza esiste tale che

Proprietà: Iniettiva e Suriettiva:



A: dominio della funzione

B: codominio

$$f(A) = \{ b \in B \mid \exists a \in A \text{ con } f(a) = b \}$$

: immagine di f .

Descrizione dei numeri reali

$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots$

Notazione
decimale

centinaia

decine

unità

parte frazionaria:

può essere composta
da un numero finito o
infinito di cifre.

Se sono infinite, possono
essere periodiche o non periodiche.

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è formato da numeri con
parte frazionaria finita o periodica.

Attenzione la scrittura decimale permette
di scrivere lo stesso numero in due modi
diversi. Esempio, $0, \bar{9} = 0,99999\dots$
è uguale a 1!

Infatti: Chiamo $x = 0, \bar{9}$. Voglio mostrare

che $x = 1$.

$$x = 0,9 \Rightarrow 10x = 9,9.$$

$$\begin{array}{r|l} 10x - & 9,9 - \\ \hline x & 0,9 \\ \hline 9x & 9 \end{array}$$

Quindi $9x = 9 \Rightarrow x = 1$.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

A, B insiemi

Prodotto Cartesiano
dei due insiemi
 A e B .

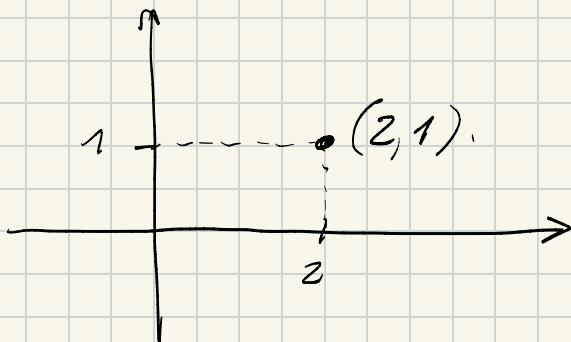
Piano Cartesiano

prodotto cartesiano

Coordinate

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\},$$

$(1,2) \neq (2,1)$: Coppie ordinate di numeri reali.



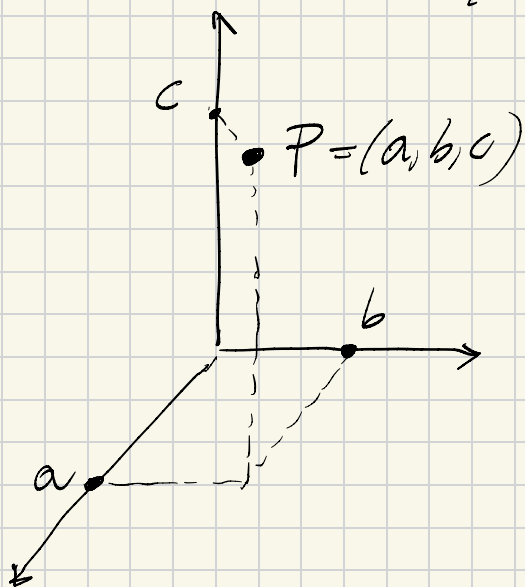
(a_1, a_2) : punto.

$\{ \text{punti del piano} \}$

$\longleftrightarrow \{ \text{Coppie ordinate di numeri reali} \} = \mathbb{R}^2$

Allo stesso modo,

$$\{ \text{punti dello spazio} \} \longleftrightarrow \{ \text{terze di numeri real.} \} = \mathbb{R}^3$$
$$\{ (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$



Più in generale:

$$\mathbb{R}^n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$