Lezione 1:

mail: luisa.fiorot@unipd.it

Programma del corso: vedi file su moodle

Argomenti principali:

1. Numeri complessi
2. Spazi Vettoriali $\vec{v}$
3. Applicazioni lineari
4. Prodotto scalare
5. Geometria

Alg lin.

Obiettivo di oggi: introdurre insiemi di numeri e i numeri complessi

$:=$ per definizione $=$

Numeri naturali

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ (appartiene)

$3+2=5 \qquad m+n \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}$ (per ogni)

$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

Operazioni:

Operazioni:

Somma : $m+n$

Elemento neutro per la somma:

Definizione: 0 si dice elemento neutro per la somma e ha le proprietà

$$\boxed{0+n = n+0 = n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}}$$

Opposto: di x è un elemento che si indica con $-x$ tale che

$$(-x)+x = x+(-x) = 0$$

$$3-2 = 3+(-2)$$

Oss. 0 è l'unico numero naturale che ha opposto in $\mathbb{N}$.

Numeri interi $\mathbb{Z}$

Def. l'elemento neutro per il prodotto 1

$$1\cdot x = x\cdot 1 = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{N}$$
$$\forall\, x \in \mathbb{Z}$$

Def dato un elemento $x \neq 0$ si dice inverso di x $\frac{1}{x} = x^{-1}$ l'elemento (se esiste) tale che

$$\frac{1}{x}\cdot x = x\cdot\frac{1}{x} = 1$$

Oss: In $\mathbb{N}$ l'unico numero invertibile è 1

In $\mathbb{Z}$ 1 e -1 sono gli unici elementi invertibili.

Numeri razionali

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \qquad \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \overset{\text{se e solo se}}{\iff} m'n = n'm \right\}$

quozienti

tale che

Esempio: $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ $\qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \ldots$

Definizione:

Un insieme C è detto un campo se vi sono due operazioni:

somma

prodotto

con le seguenti proprietà:

$x + y = y + x \quad \forall x, y \in C$ commutativa $+$

$(x+y)+z = x + (y+z) \quad \forall x, y, z \in C$ associativa $+$

0 elemento neutro per la somma

ogni $x \in C$ ha un opposto $-x \in C$

$x \cdot y = y \cdot x$ commutativa $\cdot$

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ associativa $\cdot$

1 elemento neutro per il prodotto

$\forall x \in C \setminus \{0\}$ esiste l'inverso $\frac{1}{x} : \frac{1}{x} \cdot x = 1$

meno insiemistico

$x(y+z) = xy + xz$ distributiva.

Esempio: $\mathbb{Q}$ è un campo.
$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ non sono campi.

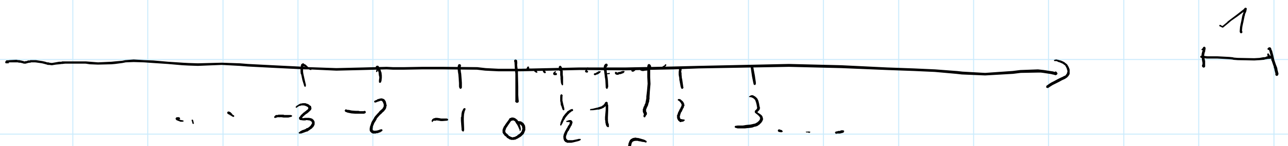
Problema: $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, se lo fosse

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow m = \sqrt{2}\, n \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

con $n \neq 0$

$\Rightarrow$ m pari allora 4 divide $m^2 \Rightarrow n$ è pari
ma in una frazione ridotta $\frac{m}{n}$ non si può avere sia m che n numeri pari.

Per avere tutte le lunghezze dobbiamo passare ai
Numeri reali $\mathbb{R}$



$$\mathbb{R} = \{ r \mid |r| \text{ è una "lunghezza"} \}$$

Si ha $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è un campo

Problema: $x^2 = -1$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$.

Numeri complessi

$$\boxed{\mathbb{C} =: \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}}$$

$i^2 = -1$

Esempi: $2-3i = 2+i(-3)$ $\quad a=2 \quad b=-3$

$$(7+4i)+(1-i) = \underline{7}+\underline{\underline{4i}}+\underline{1}-\underline{\underline{i}} = 8+3i$$

Somma di numeri complessi:

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$$

$$-(3-5i) = -3+5i$$

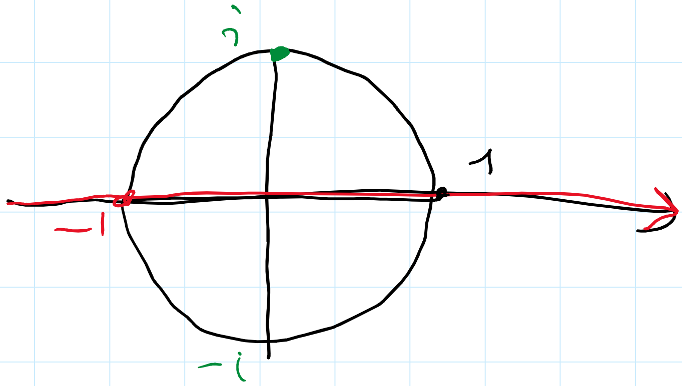
Prodotto di numeri complessi: $\to -i^2 = (-1)(-1)$

$$(2+i)\cdot(3-i) = 2\cdot 3 + i\cdot 3 - 2\cdot i + \boxed{i(-i)} =$$

$$= \underline{6} + \cancel{3i} - \cancel{2i} + \underline{1} = 7+i$$

$$i^3 = (i\cdot i)\, i = -i$$

$$i^4 = -i\cdot i = -(-1) = 1$$



Inverso di un numero complesso non nullo

$$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} =$$

$$= \frac{2-i}{4-i^2} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i \qquad a=\frac{2}{5} \quad b=-\frac{1}{5}$$

Formule: $z = a+ib \qquad z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib}\,\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Esercizi: calcolare gli inversi di

Esercizi: calcolare gli inversi di

$i \qquad 1-i \qquad 3+4i \qquad 2$

Sol: $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \frac{-i}{-i} = -i$

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25} i$$

$$\frac{1}{2}$$

Divisione: $\frac{2+i}{3-2i} = (2+i) \cdot \frac{1}{3-2i} = (2+i) \frac{1}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i}$

$$= \frac{(2+i)(3+2i)}{9+4} = \frac{6+3i+4i-2}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13} i$$

Definizione: dato un numero complesso $z = a+ib$

a si dice parte reale

b si dice parte immaginaria

$\bar{z} := a-ib$ si dice coniugato

$|z| := \sqrt{a^2+b^2}$ si dice modulo di z.