ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Commissione A. Cesaroni, P. Mannucci, a.a. 2024-2025

Corsi di laurea in Scienze Statistiche

15 settembre 2025

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(1+x) + \frac{1}{x}.$$

(a) Determinare il dominio, il segno eventuali simmetrie o periodicità.

Suggerimento: Per studiare il segno di f, studiare separatamente il segno di $\log(1+x)$ e di $\frac{1}{x}$.

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f,

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale ed assoluto di f,

(d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (8 punti)
1) Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n^2} - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

2) Studiare al variare di $\alpha > 0$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n^2} - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Esercizio 3 (8 punti)
Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} (x\cos x + \sin x)dx.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Data la funzione

$$f(x, y) = x^3 + 4xy - 2y^2$$

determinarne i punti critici e studiarne la natura.

Tempo: due ore. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. N.B. Il punteggio degli esercizi si intende esclusi i facoltativi. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver svolto tutte le altri parti e non servono per ottenere la sufficienza.

Soluzioni

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(1+x) + \frac{1}{x}.$$

(a) La funzione logaritmo è definita quando l'argomento è positivo, dunque $1 + x > 0$, che si risolve in $x > -1$, mentre devo imporre $x \neq 0$ perché sia definito $\frac{1}{x}$.

Il dominio è dunque $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Il dominio non è simmetrico rispetto all'origine nè periodico, quindi la funzione non ammette simmetrie o periodicità.

Inoltre $\log(1+x) > 0$ se e solo se $1+x > 1$, quindi se e solo se $x > 0$, e inoltre $\frac{1}{x} > 0$ se e solo se $x > 0$. Quindi per $x > 0$ entrambi i termini sono positivi e $f(x) > 0$, mentre se $-1 < x < 0$, entrambi i termini sono negativi e dunque $f(x) < 0$.

(b) Calcoliamo i limiti della funzione a -1^+ e a 0:

$$\lim_{x \to -1^+} \log(1+x) + \frac{1}{x} = -\infty - 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \log(1+x) + \frac{1}{x} = \log 1 - \infty = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \log(1+x) + \frac{1}{x} = \log 1 + \infty = +\infty.$$

$x = -1$ è asintoto verticale destro, mentre $x = 0$ è asintoto verticale per la funzione.

Calcoliamo il limite a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \log(1+x) + \frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty.$$

La funzione non ha asintoto orizzontale. Cerchiamo se esiste un asintoto obliquo. Ricordando la gerarchia degli infiniti calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+x)}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Dunque la funzione non ha asintoto obliquo.

(c) La funzione è continua nel suo dominio. I punti $x = -1, 0$ sono singolarità di seconda specie. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x - 1}{x^2(1+x)}.$$

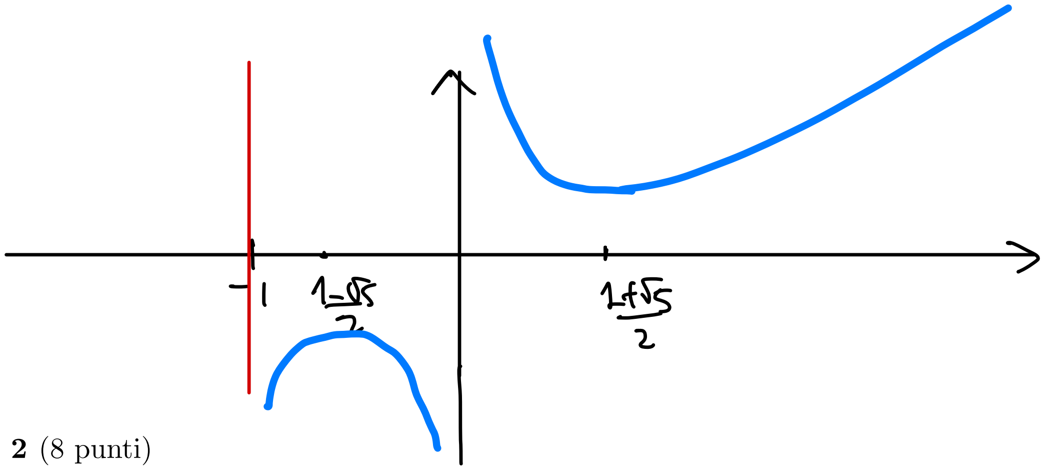
La funzione è derivabile nel suo dominio.

Calcoliamo il segno della derivata. Osserviamo che nel dominio della funzione $1 + x > 0$. Dunque $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - x - 1 \geq 0$, che è equivalente a $x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, oppure $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Notiamo che $2 < \sqrt{5} < 3$ dunque $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.

Per il criterio di monotonia la funzione è monotona crescente in $\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ e monotona decrescente in $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Il punto $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo locale (non globale in quanto la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$), mentre il punto $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo locale (non globale in quanto la funzione tende a $-\infty$ per $x \to -1^+$).

(d)



Esercizio 2 (8 punti)
1) Calcolare al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^2} - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Utilizzando il polinomio di Taylor di $\sin x$ per $x \to 0$ abbiamo che

$$\frac{1}{n^2} - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{1}{(n^2)^3}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^6} = \frac{1}{6}\frac{1}{n^6}.$$

Dunque il limite diventa

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^2} - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{1}{6}\frac{1}{n^6} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \alpha = 6 \\ 0 & \alpha < 6 \\ +\infty & \alpha > 6. \end{cases}.$$

2) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^2} - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

è una serie a termini positivi. Usiamo quindi il criterio del confronto asintotico e abbiamo, utilizzando quanto visto nel punto precedente,

$$n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^2} - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{1}{n^{6-\alpha}}.$$

Per il confronto asintotico con la serie armonica generalizzata concludiamo che la serie converge per $6-\alpha > 1$, cioé $\alpha < 5$, e diverge per $6 - \alpha \leq 1$, cioé $\alpha \geq 5$.

Esercizio 3 (8 punti) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} (x\cos x + \sin x)dx.$$

Calcoliamo le primitive. Procediamo per parti per il primo integrando e per integrazione diretta per il secondo.

$$\int (x\cos x + \sin x)dx = x\sin x - \int \sin x dx - \cos x + c = x\sin x - (-\cos x) - \cos x + c = x\sin x + c.$$

Per il corollario del teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che

$$\int_0^{\pi/2} (x\cos x + \sin x)dx = [x\sin x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 4 (8 punti)
Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 + 4xy - 2y^2$$

osserviamo che ha come dominio $\mathbb{R}^2$ ed è regolare su tutto il suo dominio. Per determinare i punti critici risolviamo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4x = 0 \\ x = y \end{cases}$$

che ha come soluzioni $(0,0)$ e $(-4/3,-4/3)$. Per determinare la natura dei punti critici calcoliamo la matrice hessiana

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

è indefinita (visto che ha determinante negativo), quindi il punto $(0,0)$ è un punto di sella. Invece abbiamo che

$$D^2 f(-4/3,-4/3) = \begin{pmatrix} -16/3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

ha determinante positivo e traccia negativa, dunque è definita negativa. Quindi il punto $(-4/3,-4/3)$ è un punto di massimo locale.