ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 08.09.2025

TEMA 1 Svolgimento

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x - \arctan(x-1)$$

a) determinarne il dominio; calcolarne i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

b) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

c) calcolarne la derivata seconda, determinarne gli intervalli di concavità e di convessià ed eventuali punti di flesso;

d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Nota Bene: Lo studio del segno NON é richiesto.

Svolgimento.

a) La funzione arctan per definizione ben posta su tutto $\mathbb{R}$. Per composizione di funzioni, la funzione data risulta ben posta su tutto $\mathbb{R}$, ovvero $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Osserviamo che $f(1) = 1 - \arctan(0) = 1$ e $f(-1) = -1 - \arctan(-2)$, da cui $f(-1) \neq f(1)$ e $-f(-1) \neq f(1)$, quindi la funzione data non é ne pari ne dispari. Inoltre la funzione non periodica, perch non composizione di funzioni periodiche note.

Siccome $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, ci basta controllare la presenza di asintoti a $+\infty$ e $-\infty$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

per le propriet di arctan e per l'algebra dei limiti. Ne deduciamo che f non ha asintoti verticali n orizzontali, ma solo eventualmente obliqui. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

ancora per le propriet di arctan. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -\lim_{x\to+\infty} \arctan(x-1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = -\lim_{x\to-\infty} \arctan(x-1) = \frac{\pi}{2},$$

ancora per le propriet di arctan. Ne segue che f ammette $y = x - \frac{\pi}{2}$ come asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e $y = x + \frac{\pi}{2}$ come asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

b) Osserviamo che $f \in C^\infty(\mathcal{D}(f))$ perch composizione di funzioni C^∞ sul suo dominio, quindi in particolare continua e derivabile su tutto il suo dominio. Osserviamo che

$$f'(x) = 1 - (\arctan(x-1))' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2+1} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza, vediamo facilmente che

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1}{(x-1)^2+1} < 1 \iff (x-1)^2 > 0 \iff x \neq 1,$$

e pertanto $f'(x) = 0 \iff x = 1$.

Dal calcolo della derivata deduciamo che f strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e presenta un punto stazionario a $x = 1$, che peró non é estremante locale. Inoltre, dallo studio degli asintoti deduciamo immediatamente che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. Non ci sono quindi estremanti n locali n globali.

c) Abbiamo gi osservato che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, quindi f'' ben definita su tutto il dominio. Dal calcolo della derivata prima deduciamo che

$$f''(x) = 0 - \left(\frac{1}{(x-1)^2+1}\right)' = \frac{2(x-1)}{((x-1)^2+1)^2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza, vediamo facilmente che

$$f''(x) > 0 \iff \frac{2(x-1)}{((x-1)^2+1)^2} > 0 \iff 2(x-1) > 0 \iff x > 1$$

e pertanto $f''(x) = 0 \iff x = 1$.

Dal calcolo della derivata seconda deduciamo che f strettamente concava in $(-\infty, 1)$, strettamente convessa in $(1, +\infty)$, e presenta un punto di flesso a $x = 1$.

d) Il grafico della funzione segue:

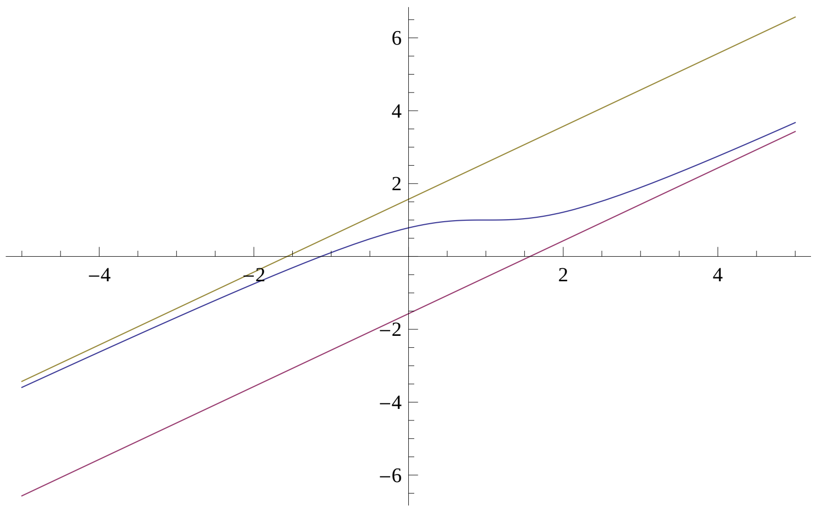

Figure 1: abbozzo del grafico della funzione $f(x) = x - \arctan(x-1)$ Tema 1.

Esercizio 2 (punti 8) Usando le formule di MacLaurin per ogni $a > 0$, calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x^a}{\arcsin x - x}.$$

Svolgimento. Dagli sviluppi asintotici sappiamo che

$$\arcsin(x) - x = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0^+,$$

e quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - x^a}{\arcsin(x) - x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - x^a}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}.$$

Per il numeratore, dagli sviluppi asintotici sappiamo che

$$\sin(x) - x^a = x - x^a - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Discutiamo quindi i vari casi. Se $a = 1$, allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - x^a}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -1.$$

Se invece $a > 1$, allora $x^a = o(x)$ per $x \to 0^+$, quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - x^a}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + o(x)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6}{x^2} = +\infty.$$

Se infine $a \in (0, 1)$, allora $x = o(x^a)$ per $x \to 0^+$, quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - x^a}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^a + o(x^a)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -\lim_{x\to 0^+} 6x^{a-3} = -\infty$$

dato che $a < 3$. Concludiamo quindi che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - x^a}{\arcsin(x) - x} = \begin{cases} +\infty & a > 1, \\ -1 & a = 1, \\ -\infty & a \in (0, 1). \end{cases}$$

Esercizio 3 (punti 8) Discutere, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n^2 + 1}(x - 1)^n.$$

Svolgimento. Osserviamo che la serie é ben posta e che é a termini $a_n = \frac{3n}{4n^2+1}(x - 1)^n$ a segno variabile, quindi dobbiamo studiare separatamente la convergenza semplice e quella assoluta, ricordando che la convergenza assoluta implica anche quella semplice.

Ponendo $b_n = \frac{3n}{4n^2+1}|x - 1|^n$, applichiamo il criterio asintotico del rapporto e troviamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3(n+1)}{3n} \frac{4n^2 + 1}{4(n+1)^2 + 1} \frac{|x - 1|^{n+1}}{|x - 1|^n} \right) = |x - 1|.$$

Discutiamo i vari casi. Per $|x - 1| < 1$, cio per $x \in (0, 2)$, la serie $\sum b_n$ converge, e quindi la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente. Per $|x-1| > 1$, cio $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, la serie $\sum b_n$ diverge, e si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty.$$

Quindi la condizione necessaria non soddisfatta pertanto la serie $\sum a_n$ non converge. Il criterio non si applica nel caso $|x-1|=1$, cio $x=2$ oppure $x=0$. Discutiamo quindi questi casi separatamente. Per $x=2$, la serie data a termini positivi e precisamente uguale a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{4n^2+1}.$$

Siccome $\frac{3n}{4n^2+1} \sim \frac{3}{4}\frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$, dal confronto asintotico con la serie armonica deduciamo che la serie data diverge. Per $x=0$, invece, la serie data a segni alterni e precisamente uguale a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3n}{4n^2+1}.$$

Ponendo $c_n = \frac{3n}{4n^2+1}$, osserviamo che la serie data della forma $\sum(-1)^n c_n$, con $(c_n)_n > 0$ $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{4n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4n} = 0$ (infinitesima); $c_{n+1} \leq c_n$ per ogni $n \geq 1$ (decrescente), dato che

$$c_{n+1} \leq c_n \iff \frac{3(n+1)}{4(n+1)^2+1} \leq \frac{3n}{4n^2+1} \iff 4n^2+4n \geq 1 \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Per il criterio di Leibniz la serie data quindi converge.

Ricapitolando, troviamo che:

1. $x < 0 \implies$ la serie non converge (NO condizione necessaria);
2. $x = 2 \implies$ convergenza semplice ma non assoluta;
3. $x \in (0,2) \implies$ convergenza semplice e assoluta;
4. $x \geq 2 \implies$ la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 4 (punti 8 solo per a.a. 24/25) Si consideri l'equazione differenziale ordinaria (NON LINEARE) data da

$$y'(t) = 3t(y(t))^2$$

dove $t \in \mathbb{R}$.

a) trovarne la soluzione generale

b) trovarne l'unica soluzione $\hat{y}(t)$ che verifica la condizione iniziale $\hat{y}(1) = \frac{1}{3}$.

c) *Facoltativo:* Individuare il dominio naturale di $\hat{y}(t)$ e i suoi eventuali asintoti.

Svolgimento. L'EDO assegnata del primo ordine non lineare, a variabili separabili.

(i) Se $y(t) = m$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $m \in \mathbb{R}$, allora $y'(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi deve essere

$$0 = 3t(m)^2 \iff tm^2 = 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Scegliendo $t = 1$ si trova $m = 0$, quindi l'unica soluzione costante della EDO assegnata la funzione nulla.

(ii) Sfruttiamo la separazione delle variabili. Abbiamo che

$$y' = 3t\,y^2 \implies \frac{y'}{y^2} = 3t \implies \left(-\frac{1}{y}\right)' = \left(\frac{3t^2}{2}\right)' \implies -\frac{1}{y} = \frac{3t^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

da cui ricaviamo

$$y(t) = -\frac{1}{\frac{3t^2}{2} + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Semplificando l'espressione e rinominando la costante (dato che arbitraria), troviamo

$$y(t) = -\frac{2}{3}\frac{1}{t^2 + c}.$$

(iii) Imponendo la condizione data, troviamo che

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}\frac{1}{1^2 + c} \iff 1 + c = -2 \iff c = -3,$$

quindi la soluzione cercata

$$y(t) = -\frac{2}{3}\frac{1}{t^2 - 3}.$$

L'insieme di definizione D che contiene il punto iniziale $x = 1$ di questa funzione chiaramente dato da $D = \{x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})\}$

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Determinare le radici complesse dell'equazione $z^3 = 8i$, scriverle in forma algebrica e disegnarle sul piano di Gauss.

Svolgimento: Come si vede facilmente $(-2i)^3 = 8i$ quindi una soluzione dell'equazione é data da $z_1 = -2i$. Le altre due si ottengono sfasando di $\frac{2}{3}\pi$ cioé $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$ e $z_3 = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

La rappresentazione nel piano di Gauss segue:

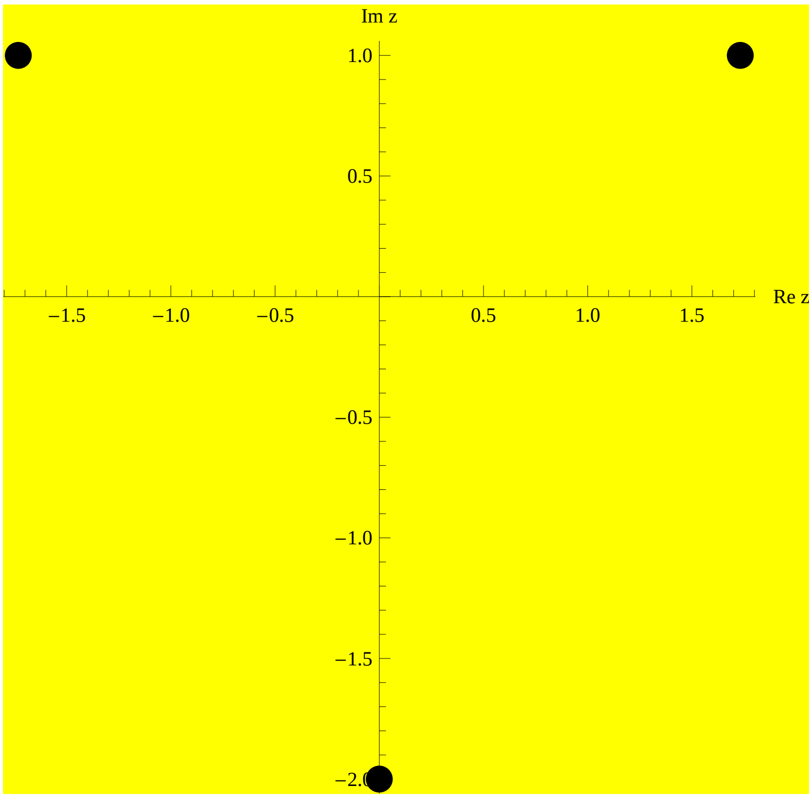

Figure 2: Soluzioni dell'equazione $z^3 = 8i$ Tema 1.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 08.09.2025

TEMA 2 Svolgimento

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x - \arctan(x+1)$$

a) determinarne il dominio; calcolarne i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

b) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

c) calcolarne la derivata seconda, determinarne gli intervalli di concavità e di convessià ed eventuali punti di flesso;

d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Nota Bene: Lo studio del segno NON é richiesto.

Svolgimento.

a) La funzione arctan per definizione ben posta su tutto $\mathbb{R}$. Per composizione di funzioni, la funzione data risulta ben posta su tutto $\mathbb{R}$, ovvero $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Osserviamo che $f(1) = 1 - \arctan(2)$ e $f(-1) = -1 - \arctan(0) = -1$, da cui $f(-1) \neq f(1)$ e $-f(-1) \neq f(1)$, quindi la funzione data non é ne pari ne dispari. Inoltre la funzione non periodica, perch non composizione di funzioni periodiche note.

Siccome $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, ci basta controllare la presenza di asintoti a $+\infty$ e $-\infty$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

per le propriet di arctan e per l'algebra dei limiti. Ne deduciamo che f non ha asintoti verticali n orizzontali, ma solo eventualmente obliqui. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

ancora per le propriet di arctan. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -\lim_{x\to+\infty} \arctan(x+1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = -\lim_{x\to-\infty} \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2},$$

ancora per le propriet di arctan. Ne segue che f ammette $y = x - \frac{\pi}{2}$ come asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e $y = x + \frac{\pi}{2}$ come asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

b) Osserviamo che $f \in C^\infty(\mathcal{D}(f))$ perch composizione di funzioni C^∞ sul suo dominio, quindi in particolare continua e derivabile su tutto il suo dominio. Osserviamo che

$$f'(x) = 1 - (\arctan(x+1))' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2+1} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza, vediamo facilmente che

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1}{(x+1)^2+1} < 1 \iff (x+1)^2 > 0 \iff x \neq -1,$$

e pertanto $f'(x) = 0 \iff x = -1$.

Dal calcolo della derivata deduciamo che f strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e presenta un punto stazionario a $x = -1$, che peró non é estremante locale. Inoltre, dallo studio degli asintoti deduciamo immediatamente che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$. Non ci sono quindi estremanti n locali n globali.

c) Abbiamo gi osservato che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, quindi f'' ben definita su tutto il dominio. Dal calcolo della derivata prima deduciamo che

$$f''(x) = 0 - \left(\frac{1}{(x+1)^2+1}\right)' = \frac{2(x+1)}{((x+1)^2+1)^2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza, vediamo facilmente che

$$f''(x) > 0 \iff \frac{2(x+1)}{((x+1)^2+1)^2} > 0 \iff 2(x+1) > 0 \iff x > -1$$

e pertanto $f''(x) = 0 \iff x = -1$.

Dal calcolo della derivata seconda deduciamo che f strettamente concava in $(-\infty, -1)$, strettamente convessa in $(-1, +\infty)$, e presenta un punto di flesso a $x = -1$.

d) Il grafico della funzione segue:

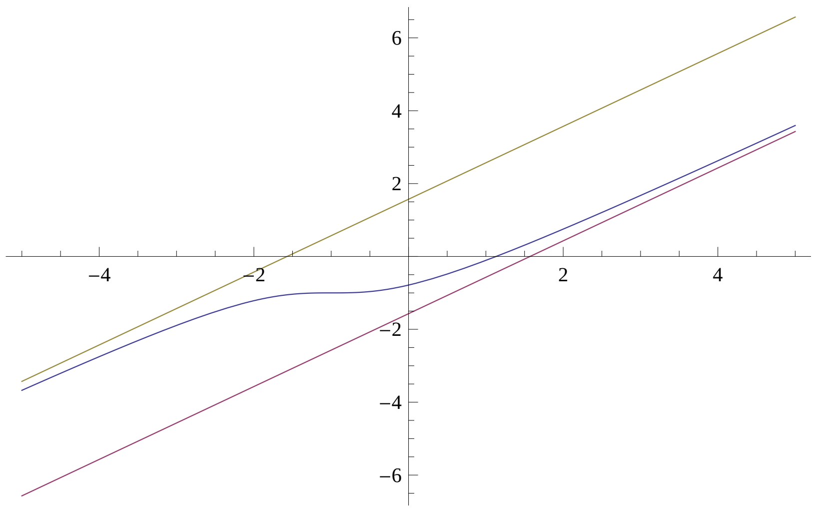

Figure 3: abbozzo del grafico della funzione $f(x) = x - \arctan(x+1)$ Tema 2.

Esercizio 2 (punti 8) Usando le formule di MacLaurin per ogni $a > 0$, calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x - \frac{x^a}{2}}{\arcsin x - x}.$$

Svolgimento. Dagli sviluppi asintotici sappiamo che

$$\arcsin(x) - x = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0^+,$$

e quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x) - \frac{x^a}{2}}{\arcsin(x) - x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x) - \frac{x^a}{2}}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}.$$

Per il numeratore, dagli sviluppi asintotici sappiamo che

$$1-\cos(x) - \frac{x^a}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^a}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Discutiamo quindi i vari casi. Se $a = 2$, allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x) - \frac{x^a}{2}}{\frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^4}{24} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 0.$$

Se invece $a > 2$, allora $x^a = o(x^2)$ per $x \to 0^+$, quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x) - \frac{x^a}{2}}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x} = +\infty.$$

Se infine $a \in (0, 2)$, allora $x^2 = o(x^a)$ per $x \to 0^+$, quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x) - \frac{x^a}{2}}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^a}{2} + o(x^a)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -\lim_{x\to 0^+} 3x^{a-3} = -\infty$$

dato che $a < 3$. Concludiamo quindi che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x) - \frac{x^a}{2}}{\arcsin(x) - x} = \begin{cases} +\infty & a > 2, \\ 0 & a = 2, \\ -\infty & a \in (0, 2). \end{cases}$$

Esercizio 3 (punti 8) Discutere, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{3n^2+1}(x+1)^n.$$

Svolgimento. Osserviamo che la serie é ben posta e che é a termini $a_n = \frac{4n}{3n^2+1}(x+1)^n$ a segno variabile, quindi dobbiamo studiare separatamente la convergenza semplice e quella assoluta, ricordando che la convergenza assoluta implica anche quella semplice.

Ponendo $b_n = \frac{4n}{3n^2+1}|x+1|^n$, applichiamo il criterio asintotico del rapporto e troviamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4(n+1)}{4n} \frac{3n^2+1}{3(n+1)^2+1} \frac{|x+1|^{n+1}}{|x+1|^n} \right) = |x+1|.$$

Discutiamo i vari casi. Per $|x+1| < 1$, cio per $x \in (-2, 0)$, la serie $\sum b_n$ converge, e quindi la serie $\sum a_n$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente. Per $|x+1| > 1$, cio $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, la serie $\sum b_n$ diverge, e si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty.$$

Quindi la condizione necessaria non soddisfatta pertanto la serie $\sum a_n$ non converge. Il criterio non si applica nel caso $|x+1| = 1$, cio $x = 0$ oppure $x = -2$. Discutiamo quindi questi casi separatamente. Per $x = 0$, la serie data a termini positivi e precisamente uguale a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n}{3n^2+1}.$$

Siccome $\frac{4n}{3n^2+1} \sim \frac{4}{3}\frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$, dal confronto asintotico con la serie armonica deduciamo che la serie data diverge. Per $x = -2$, invece, la serie data a segni alterni e precisamente uguale a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4n}{3n^2+1}.$$

Ponendo $c_n = \frac{4n}{3n^2+1}$, osserviamo che la serie data della forma $\sum(-1)^n c_n$, con $(c_n)_n > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n}{3n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{3n} = 0$ (infinitesima); $c_{n+1} \le c_n$ per ogni $n \ge 1$ (decrescente), dato che

$$c_{n+1} \le c_n \iff \frac{4(n+1)}{3(n+1)^2+1} \le \frac{4n}{3n^2+1} \iff 3n^2 + 3n \ge 1 \quad \text{per ogni } n \ge 1.$$

Per il criterio di Leibniz la serie data quindi converge.

Ricapitolando, troviamo che:

1. $x < -2 \implies$ la serie non converge (NO condizione necessaria);
2. $x = -2 \implies$ convergenza semplice ma non assoluta;
3. $x \in (-2, 0) \implies$ convergenza semplice e assoluta;
4. $x \ge 0 \implies$ la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 4 (punti 8 solo per a.a. 24/25) Si consideri l'equazione differenziale ordinaria (NON LINEARE) data da

$$y'(t) = 2t(y(t))^2$$

dove $t \in \mathbb{R}$.

a) trovarne la soluzione generale

b) trovarne l'unica soluzione $\hat{y}(t)$ che verifica la condizione iniziale $\hat{y}(1) = 1$.

c) *Facoltativo:* Individuare il dominio naturale di $\hat{y}(t)$ e i suoi eventuali asintoti.

Svolgimento. L'EDO assegnata del primo ordine non lineare, a variabili separabili.

(i) Se $y(t) = m$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $m \in \mathbb{R}$, allora $y'(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi deve essere

$$0 = 2t(m)^2 \iff tm^2 = 0 \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Scegliendo $t = 1$ si trova $m = 0$, quindi l'unica soluzione costante della EDO assegnata la funzione nulla.

(ii) Sfruttiamo la separazione delle variabili. Abbiamo che

$$y' = 2t\,y^2 \implies \frac{y'}{y^2} = 2t \implies \left(-\frac{1}{y}\right)' = \left(t^2\right)' \implies -\frac{1}{y} = t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

da cui ricaviamo

$$y(t) = -\frac{1}{t^2 + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(iii) Imponendo la condizione data, troviamo che

$$1 = -\frac{1}{1+c} \iff 1 + c = -1 \iff c = -2,$$

quindi la soluzione cercata

$$y(t) = \frac{1}{2 - x^2}.$$

L'insieme di definizione D che contiene il punto iniziale $x = 1$ di questa funzione chiaramente dato da $D = \{x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Determinare le radici complesse dell'equazione $z^3 = -8i$, scriverle in forma algebrica e disegnarle sul piano di Gauss.

Svolgimento: Come si vede facilmente $(2i)^3 = -8i$ quindi una soluzione dell'equazione é data da $z_1 = 2i$. Le altre due si ottengono sfasando di $\frac{2}{3}\pi$ cioé $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$ e $z_3 = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$

La rappresentazione nel piano di Gauss segue:

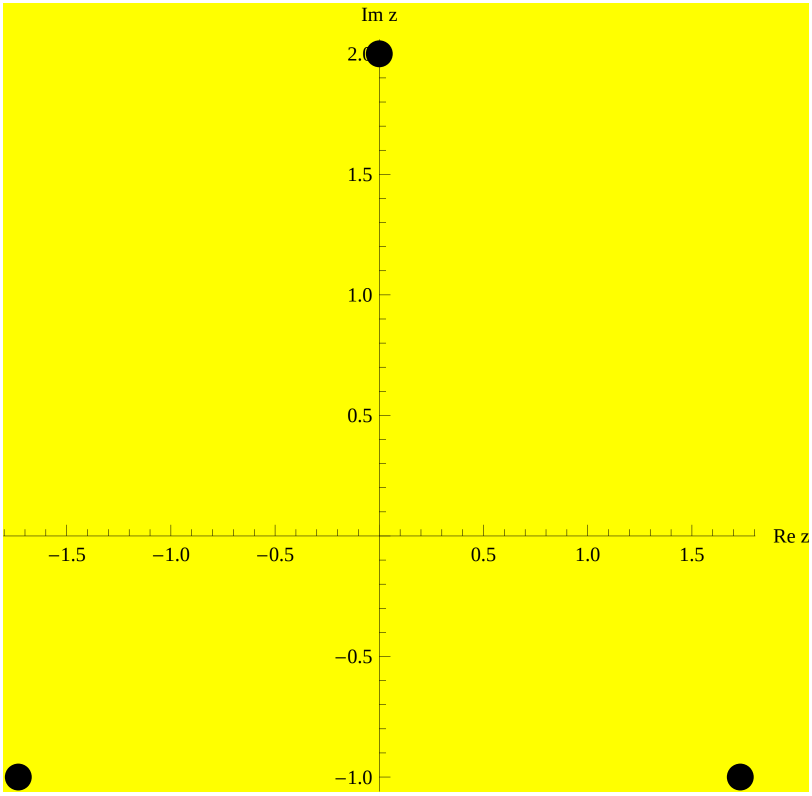

Figure 4: Soluzioni dell'equazione $z^3 = -8i$ Tema 2.