SEGNALI E SISTEMI
3 settembre 2025
terzo appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2024-2025)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = e^{jt} \cdot \sin(2t) + e^{j3t} + \cos\left(\tfrac{4\pi}{3}t\right) .$$

1. Dire se il segnale è periodico e in caso affermativo trovare il periodo fondamentale. [2 punti]

2. Nel caso non sia periodico, proporre un filtro LTI che, dato in ingresso $x(t)$, restituisca in uscita un segnale periodico (è sufficiente trovare la risposta in frequenza del filtro in questione). [2 punti]

3. Se il segnale è dato in ingresso ad un sistema LTI BIBO stabile, dire quale/i tra i seguenti segnali NON può essere ottenuto in alcun modo in uscita dal suddetto sistema LTI e motivare la risposta [3 punti]:

   - $y_1 = (1 + \frac{j}{2}) \cdot e^{j3t}$
   - $y_2 = e^{-jt}$
   - $y_3 = \sqrt{5} \cdot e^{jt}$
   - $y_4 = 0.$

Soluzione.

1. Usando le formule di Eulero si ha che

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{jt} \cdot \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} + e^{j3t} + \frac{e^{j\frac{4\pi}{3}t} + e^{-j\frac{4\pi}{3}t}}{2} \\ &= \left(\tfrac{1}{2j} + 1\right)e^{j3t} - \tfrac{1}{2j}e^{-jt} + \tfrac{1}{2}e^{\frac{4\pi}{3}t} + \tfrac{1}{2}e^{-\frac{4\pi}{3}t} . \end{aligned}$$

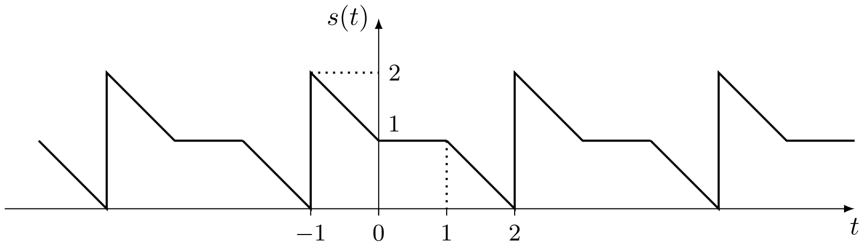
   Si evidenziano quindi le pulsazioni $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = \frac{4\pi}{3}$, $\omega_4 = -\frac{4\pi}{3}$, che non sono tutte in rapporto razionale tra di loro, perciò il segnale non è periodico.

2. Un filtro LTI che restituisca in uscita un segnale periodico potrebbe essere un filtro passa basso ideale che tagli le pulsazioni $\pm\frac{4\pi}{3}$ e mantenga le altre inalterate. Per esempio il filtro con risposta in frequenza $H(j\omega) = \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$.

3. Com'è noto dalla teoria, i sistemi LTI agiscono sui segnali esponenziali complessi modulandone ampiezza e fase; non possono invece modificarne la pulsazione. Il segnale y_3 non può quindi essere ottenuto in uscita da un sistema LTI, se l'ingresso è $x(t)$, poichè la pulsazione $\omega = 1$ non è presente nel segnale di ingresso. Al contrario i segnali y_1, y_2 e y_4 possono essere ottenuti modulando opportunamente la risposta in frequenza del sistema.

Esercizio 2 [punti 7]

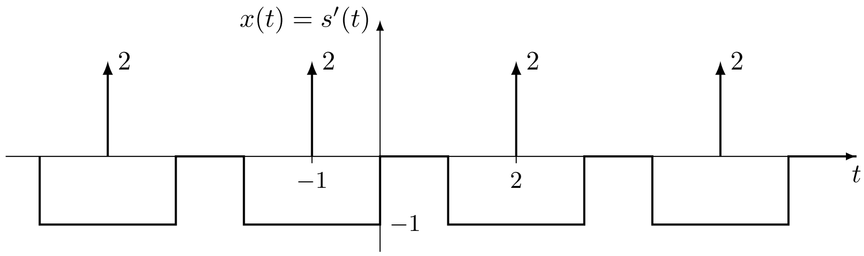
Si consideri il segnale periodico illustrato in figura.



1. Trovare i coefficienti della serie di Fourier S_k associati al segnale. [5 punti]
2. Se il segnale viene dato in ingresso ad un filtro passa-basso ideale $H(j\omega) = \mathrm{rect}(\omega)$, qual'è l'uscita $y(t)$ dal filtro? [2 punti]

Soluzione.

1. Si può procedere tramite la regola di derivazione, osservando graficamente la forma della derivata del segnale.

   da cui si ottiene

   $$x(t) = s'(t) = \mathrm{rep}_3\Big(2\delta(t-2) - \mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}(t-2))\Big)$$

   Pertanto, osservando che $T_p = 3$ e quindi $\omega_0 = \frac{2}{3}\pi$, dalla regola di trasformazione di un'onda quadra con duty cycle $d = \frac{2}{3}$ e di un delta, si ottiene

   $$X_k = \Big(\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}\mathrm{sinc}(\tfrac{2}{3}k)\Big)\, e^{-jk\omega_0 2} = \tfrac{2}{3}(1 - \mathrm{sinc}(\tfrac{2}{3}k))\, e^{-j\frac{4\pi}{3}k}$$

   e pertanto dalla regola di ricostruzione della derivata si ha

   $$S_k = \begin{cases} m_s & , k = 0 \\ \dfrac{X_k}{jk\omega_0} & , k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \dfrac{1 - \mathrm{sinc}(\frac{2}{3}k)}{j\pi k}\, e^{-j\frac{4\pi}{3}k} & , k \neq 0 \end{cases}$$

2. Il filtro ha pulsazine di taglio $\omega_c = 1$.Poichè $\omega_0 > 1$, il filtro lascia passare la sola componente a pulsazione nulla e si ha $y(t) = m_s = 1$.

Esercizio 3 [punti 7]

Sia dato il sistema LTI causale descritto dall'equazione differenziale

$$y'''(t) + 5y''(t) + 6y'(t) = -x''(t) + (1-a)\cdot x'(t) + a\cdot x(t)$$

con $a \in \mathbb{R}$.

1. Trovare la funzione di trasferimento. [1 punto]
2. Dire per quale valore di a il sistema è BIBO stabile, motivando la risposta. [2 punti]
3. Per quel valore di a, calcolare la risposta impulsiva. [2 punti]
4. Per $a = 1$ trovare un ingresso limitato che porga un'uscita illimitata. [2 punti]

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento si trova per ispezione
$$H(s) = \frac{-s^2 + (1-a)s + a}{s^3 + 5s^2 + 6s} = \frac{(1-s)(s+a)}{s(s+2)(s+3)}\ .$$
2. Per determinare la BIBO stabilità del sistema bisogna valutare la parte reale dei poli di $H(s)$ dopo eventuali cancellazioni con gli zeri. I poli $s = -2$ e $s = -3$ hanno parte reale negativa. Il polo in $s = 0$, avendo parte reale nulla, renderebbe il sistema non BIBO stabile. Questo però viene cancellato da uno zero nel caso $a = 0$, che è quindi il valore cercato.
3. Nel caso $a = 0$, $H(s)$ diventa
$$H(s) = \frac{(1-s)}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$
L'estrazione dei poli (semplici) porge $A = 3$, $B = -4$, da cui
$$H(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{4}{s+3}\ , \qquad h(t) = \left(3e^{-2t} - 4e^{-3t}\right)\cdot 1(t)$$
con $1(t)$ il gradino unitario.
4. Per $a = 1$ si ha
$$H(s) = \frac{(1-s)(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$
Per ottenere un'uscita illimitata con un ingresso limitato è necessario sollecitare il polo instabile $s = 0$. Ponendo infatti $x(t) = 1(t)$, si ha $X(s) = \frac{1}{s}$ e quindi
$$Y(s) = \frac{(1-s)(s+1)}{s^2(s+2)(s+3)}$$
Antitrasformando, si ottiene un segnale del tipo $y(t) = (c_1\,t + c_2e^{-2t} + c_3e^{-3t})\cdot 1(t)$, che diverge.

Esercizio 4 [punti 3]

Sia dato il sistema a tempo discreto

$$y(n) = x(2-n) + \tfrac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} x(n-k)\ .$$

Si dica, giustificando opportunamente la risposta, se il sistema è:

1. lineare e tempo invariante (LTI) [1 punto],
2. BIBO stabile [1 punto],
3. causale [1 punto].

Soluzione.

1. Il sistema è composto da due componenti in parallelo, una che restituisce $x(2-n)$ che non è tempo invariante in quanto

$$\underbrace{x(2-(n-n_0))}_{\text{uscita traslata}} \neq \underbrace{x((2-n)-n_0)}_{\text{ingresso traslato}}\ ,$$

ed una seconda che è un filtro a media mobile su 8 valori (un filtro) che invece è tempo invariante. Pertanto il sistema non è LTI.

2. Il sistema è invece BIBO stabile in quanto, per $|x(n)| < L_x$ si ha

$$|y(n)| \leq |x(2-n)| + \tfrac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} |x(n-k)| \leq L_x + L_x = 2L_x$$

3. Infine, il sistema non è causale per la presenza del termine $x(2-n)$. Per $n = 0$, ad esempio, l'uscita $y(n) = y(0)$ fabbisogna del valore $x(2-n) = x(2)$ che appartiene ai valori futuri.

Esercizio 5 [punti 3]

Sia dato il segnale
$$s(t) = \mathrm{sinc}^3(7t)\ \cos(4\pi t)\ .$$
Quale è il più grande passo di campionamento T che garantisce una perfetta ricostruzione del segnale $s(t)$ dai campioni $s(nT)$? Si giustifichi opportunamente la risposta.

Soluzione. Ricordando la trasformata di Fourier di un sinc scalato
$$\mathrm{sinc}(7t) \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{7}\ \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{14\pi})$$
e la regola di dualità tra prodotto e convoluzione, si ottiene che il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}^3(7t)$ nel dominio di Fourier $X(j\omega)$ ha estensione $e(X) = [-21\pi, 21\pi]$. Poichè il segnale è modulato, nel dominio di Fourier si ha
$$S(j\omega) = \tfrac{1}{2}X(j(\omega - 4\pi)) + \tfrac{1}{2}X(j(\omega + 4\pi))$$
e pertanto l'estensione di $S(j\omega)$ è $e(S) = [-25\pi, 25\pi]$. Per soddisfare alle richieste del teorema di Shannon, quindi, è necessario che $25\pi \le \pi/T$, e pertanto $T \le \frac{1}{25}$. Il valore richiesto è pertanto $T = \frac{1}{25}$.

Esercizio 6 [punti 3]

In MatLab, i valori della trasformata di Fourier di un segnale $x(t)$ sono collezionati nel vettore complesso X di lunghezza $N = 1000$ associato a pulsazioni spaziate di un valore ω_0 e collezionate nel vettore $\omega = (-500, 499) * \omega_0$. Quale dei seguenti codici dà una rappresentazionw corretta del segnale $x(t)$?

1. $T = 2\pi/(N\omega_0)$;
   $x = \mathrm{ifftshift}(\mathrm{ifft}(X))/T$;
   $t = (0 : N-1) * T$;
   $\mathrm{plot}(t, \mathrm{real}(x))$;

2. $T = 2\pi/(N\omega_0)$;
   $x = \mathrm{ifft}(\mathrm{ifftshift}(X))/T$;
   $t = (0 : N-1) * T$;
   $\mathrm{plot}(t, \mathrm{real}(x), t, \mathrm{imag}(x))$;

3. $T = 2\pi/(N\omega_0)$;
   $x = \mathrm{ifft}(X)/T$;
   $t = (0 : N-1) * T$;
   $\mathrm{plot}(t, \mathrm{real}(x), t, \mathrm{imag}(x))$;

4. $T = 2\pi/(\omega_0)$;
   $x = \mathrm{ifft}(\mathrm{ifftshift}(X))/T$;
   $t = (0 : N-1) * T$;
   $\mathrm{plot}(t, x)$;

Motivare opportunamente la risposta.

Soluzione. La soluzione corretta è la 2. Nella 1 l'ordine di fft e fftshift è invertito, ed inoltre si presuppone che il segnale sia reale, il che non è garantito. Nella 3 non si applica ifftshift. Nella 4 il passo di campionamento T è errato (manca la divisione per N), inoltre il plot è errato in quanto x potrebbe avere valori complessi mentre in questo modo la sola parte reale è visualizzata.