

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA CIVILE ED INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, CANALI 1 E 2

DOCENTI: FRANCESCO ESPOSITO, LUISA FIOROT, MATTIA FOGAGNOLO.

III appello – 18/09/2023

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:

- a) Definizione di sottospazio vettoriale generato $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ove $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di un K spazio vettoriale V .
- b) Definizioni di applicazione lineare tra spazi vettoriali su un campo K .
- c) Definizione di autovalore per un endomorfismo f ed autovettore relativo.

2. Enunciare la Formula di Grassmann.

3. Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$x^4 - \frac{1+i}{1-i} = 0$$

e scriverle in forma trigonometrica.

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati con equazioni cartesiane:

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad W : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, una base $\mathcal{B}_W$ di W e $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U+W$ e $\dim(U+W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Completare la base $\mathcal{B}_W$ a base di $\mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare una base ortonormale di W .
- (d) Determinare, $T \leq W$ tale che $T \oplus U = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 3. Al variare di k nei numeri reali si determinino le soluzioni del sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + (k+2)x_3 = k \\ 2x_1 - 2x_2 + (4-k)x_3 + (k^2 + k - 3)x_4 = k^2 - k \end{cases}$$

(voltare pagina)

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- i) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- ii) Dimostrare che f è diagonalizzabile e determinare una matrice H invertibile e una matrice D diagonale tali che $H^{-1}AH = D$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo di dimensione 3 con un fissato sistema di riferimento cartesiano, si considerino le rette r e s :

$$r = (0, 1, 0) + \langle (1, 0, 2) \rangle \quad s : \begin{cases} y = 3 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

1. Determinare equazioni cartesiane per r ed equazioni parametriche per s . Determinare la posizione reciproca reciproca fra r ed s .
2. Determinare l'equazione cartesiana di un piano π contenente s e parallelo ad r .
3. Determinare la distanza fra r ed s .

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- I telefoni devono essere spenti.
- BUON LAVORO!!