

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA CIVILE ED INGEGNERIA PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, CANALI 1 E 2
DOCENTI: FRANCESCO ESPOSITO, LUISA FIOROT, MATTIA FOGAGNOLO.

IV appello – 06/02/2024

DOMANDE

1. Scrivere le seguenti definizioni:
 - a) Definizione di base ortonormale.
 - b) Definizione di polinomio caratteristico.
 - c) Definizione di matrice invertibile.
2. Dimostrare il seguente enunciato: un'applicazione lineare $f : V \rightarrow W$ è iniettiva se e solo se $\ker f = \{0_V\}$.
3. Enunciare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$x^4 - \frac{e^{\frac{i5\pi}{8}}}{i} = 0.$$

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati con equazioni cartesiane:

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- (a) Determinare: una base $\mathcal{B}_U$ di U , $\dim U$, $\dim W$, una base $\mathcal{B}_{U \cap W}$ di $U \cap W$, $\dim(U \cap W)$; una base $\mathcal{B}_{U+W}$ di $U + W$ e $\dim(U + W)$. I sottospazi U e W sono in somma diretta?
- (b) Determinare, $T \leq \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus U = \mathbb{R}^4$.
- (c) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$ sul sottospazio W .
- (d) Determinare $S \leq U + W$ tale che $S \oplus U = U + W$.

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo f_a di $\mathbb{R}^3$ tale

$$f_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x + 2y + z \\ ax - 2y + az \\ x + 2y - 5z \end{pmatrix}$$

- i) Determinare la matrice A_a associata ad f_a rispetto alla base canonica. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f_a è invertibile?
- ii) Per i valori di a per cui f_a non è invertibile determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- iii) Determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_a è ortogonalmente diagonalizzabile. Per tale valore determinare una matrice H invertibile e una matrice D diagonale tali che $H^{-1}AH = D$.
- iv) Determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$ tale che -2 sia autovalore di A_a .

(voltare pagina)

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il piano π

$$\pi : (0, -1, 1) + \langle (2, 2, -1), (0, 4, -1) \rangle$$

e i punti $A = (2, -1, 1)$, $B = (3, 0, 5)$.

- (a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π e la forma parametrica della retta r perpendicolare a π e passante per il punto A .
- (b) Determinare le equazioni di tutti i piani paralleli a π e distanti $\sqrt{2}$ da π .
- (c) Detta s la retta passante per i punti A e B , determinare la posizione reciproca delle rette r ed s e la distanza di r da s .

Regole d'esame

- Compilare ogni foglio in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..). Consegnare **il foglio bianco**, con le soluzioni scritte in modo leggibile e ordinato, e **questo foglio**. NON consegnare fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera) sul foglio bianco**.
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 3 ore.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul foglio bianco e consegnare tutti i fogli ricevuti dentro il foglio bianco.
- I telefoni devono essere spenti.
- BUON LAVORO!!