Ma 7/1/25 14:30 — 16:15 Tutorato P1 Ric. 10:30–11:30 Zoom

Gio 9/1/25 zoom/aula 10:30 — 12:15 P1 Temi d'esame Fiorot

Ve 10/1/25 zoom/aula 10:30–12:15 P2 Temi d'esame Fiorot

Ma 14/1/25 Zoom 10:30 Ric. /8).

Esercizio:

Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo simmetrico tale che $\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $a=2$ è autovalore di f.

1) Determinare una base di $\operatorname{Ker} f$, autovalori e una base di ogni autospazio di f.

2) Determinare una base ortonormale di autovettori di f.

3) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $v - f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) Determinare $A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f}$.

Svolgimento:

1) $\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad \dim \operatorname{Im} f = 1$ $\quad (\operatorname{rg}(A) = 1)$

$\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2 = m_g(0)$

$\boxed{\operatorname{Ker} f = V_0}$ $\quad f(v) = 0 \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \dim V_0 = 2 = m_g(0) \underset{\uparrow}{=} m_a(0)$

perché f è diagonalizz.

Inoltre f è simmetrico $\Rightarrow$ ortogonalmente diagonalizzabile in particolare se a e b sono autovalori distinti $\forall v \in V_a \ \forall w \in V_b \ v \perp w$.

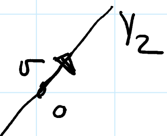
$V_0 = \operatorname{Ker} f$ $\quad a=2$ deve essere autovalore quindi gli autovalori sono

$\boxed{0 \quad 0 \quad 2}$ $\quad m_a(0) = m_g(0) = 2$ $\quad V_0 \perp V_2$ quindi

$m_a(2) = m_g(2) = 1$ $\quad$ essendo $\dim V_0 = 2$, $\dim V_2 = 1$

$V_0 \subseteq V_2^{\perp}$ $\quad \dim V_0 = 2 \quad \dim V_2^{\perp} = 2 \quad \Longrightarrow V_0 = V_2^{\perp}$

V_2: $\quad f(v) = 2v \quad$ con $v \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad V_2 = \langle v \rangle$



$2v = f(v) \in \mathrm{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \langle v \rangle = \langle 2v \rangle \subseteq \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim \langle v \rangle = 1 \qquad \dim \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 1 \qquad \Longrightarrow \quad V_2 = \langle v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$$\boxed{\begin{array}{l} V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \\ V_0 = V_2^{\perp} : \quad x + y + z = 0 \end{array}}$$

2) $B = B_{V_2} \cup B_{V_0}$ $\quad$ con $B_{V_2} = \{u_1\}$ $\quad u_1$ versore generatore di

$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad \|v_1\| = \sqrt{3}$

$B_{V_0} = \{u_2, u_3\}$ $\quad$ base ortonormale di V_0: $x + y + z = 0$

$x = -y - z \qquad \begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix} \qquad V_0 = \left\langle \underset{v_2}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}} \right\rangle$ $\qquad$ Proced. di GS su $\{v_2, v_3\}$

$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$w_3 = v_3 - (v_3 \cdot u_2) u_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix} \qquad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\cancel{2}} \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\|w_3\| = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{1+1+4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\boxed{B = \left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}} \right\}}$$

$H^{-1} A H = \boxed{H^t A H = D}$

$$H = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array}$$

$2 \quad 0 \quad 0$ $\qquad D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$H^t A H = D \qquad H^t = H^{-1}$

$\cancel{HH^t} AH = HD \qquad AH = HD \qquad A\cancel{HH^t} = HDH^t \qquad \boxed{A = HDH^t}$

3) Determinare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$: $\boxed{v - f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$B = \{ \overset{2}{u_1}, \overset{0}{u_2}, \overset{0}{u_3} \}$

$f(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + a_3 f(u_3) =$

$= a_1 2u_1 + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2a_1u_1$

$v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \qquad f(v) = 2a_1u_1$

$v - f(v) = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 - 2a_1u_1 = -a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{3}u_1 \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$-a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = \sqrt{3}u_1 + 0u_2 + 0u_3$

$(-a_1 - \sqrt{3})u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad u_1, u_2, u_3$ sono lin. indip.

$\begin{cases} -a_1 - \sqrt{3} = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -\sqrt{3} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \qquad v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = -\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1° metodo

4) $\begin{cases} f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad x = -y - z$

$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\left(\begin{array}{c|c} v_1^t & 2v_1^t \\ v_2^t & 0^t \\ v_3^t & 0^t \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Ridurre con Gauss}} \left(\begin{array}{c|c} e_1^t & f(e_1)^t \\ e_2^t & f(e_2)^t \\ e_3^t & f(e_3)^t \end{array}\right) \qquad A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{pmatrix}$$

Oss: $v - f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2° metodo: $A = HDH^t$

3° metodo: $\qquad v = \sum_{i=1}^{3} \overbrace{(v \cdot u_i)}^{a_i} u_i$

$v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \qquad f(v) = 2a_1u_1 \qquad B = \{u_1, u_2, u_3\}$ è ortonormale

$$a_1 = (v \cdot u_1) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2a_1 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(x+y+z) \\ \frac{2}{3}(x+y+z) \\ \frac{2}{3}(x+y+z) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

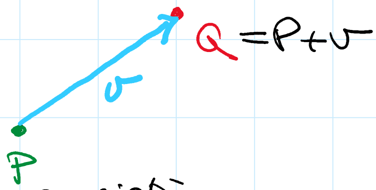
Geometria Affine

Definizione: uno spazio affine di dimensione n su $\mathbb{R}$ è:

- $\mathbb{A}$ un insieme di punti $P \in \mathbb{A}$
- V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\dim V = n$ detto giacitura o spazio direttore dello spazio affine. $v \in V$
- una funzione, detta azione di V su $\mathbb{A}$

- una funzione, detta azione di V su $\mathbb{A}$

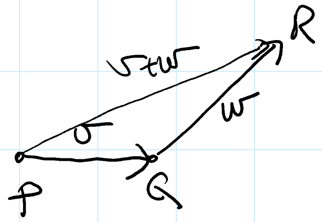
$$+ : \mathbb{A} \times V \longrightarrow \mathbb{A}$$
$$(P, v) \longmapsto P+v=Q$$



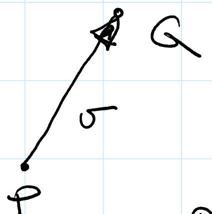
L'azione deve soddisfare le seguenti proprietà:

① $\forall\, P \in \mathbb{A} \qquad P + 0_V = P$

② $(P+v)+w = P+(v+w)$



③ Azione transitiva: cioè $\forall\, P, Q \in \mathbb{A}$ esiste un vettore $v \in V$ tale che $P+v=Q$



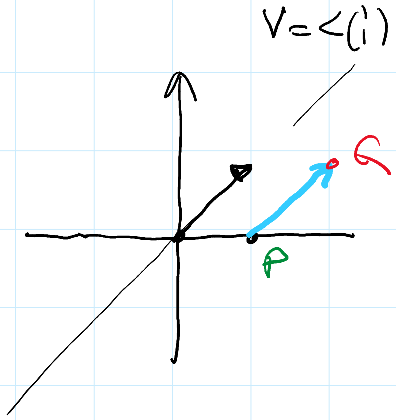
Azione è fedele: $\forall\, P, Q \in \mathbb{A}$ il vettore v : $P+v=Q$ è UNICO

Fedeltà $\qquad P+v=P+w \implies v=w$

Esempi: Spazi affini Standard

$\mathbb{A}^n = \mathbb{R}^n \qquad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$

$V = \mathbb{R}^n \qquad v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad P+v = \begin{pmatrix} p_1+a_1 \\ \vdots \\ p_n+a_n \end{pmatrix}$



In $\mathbb{R}^2$

$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P+v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = Q$

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$

Sottovarietà lineari

Def: una sottovarietà lineare L di $\mathbb{R}^n$ è l'insieme
$$L = \{ P + v \mid v \in W \} \quad \text{con} \quad W \leq \mathbb{R}^n$$
W viene detto giacitura di L e $\dim L := \dim W$.

Anche $\emptyset$ è sottovarietà lineare con $\dim \emptyset = -1$

Esempi: $\mathbb{R}^2$

		dim.
$\emptyset$	$\dim \emptyset = -1$	-1
$\{P\}$	Punto $\dim \{P\} = 0$	0
$r: P + \langle v \rangle$	$v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ retta $\dim r = 1$	1
$\mathbb{R}^2$	$\dim \mathbb{R}^2 = 2$	2

$\mathbb{R}^3$

$\emptyset$		-1
$\{P\}$	Punto	0
$r: P + \langle v \rangle$	$v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ retta	1
$\pi: P + \langle v_1, v_2 \rangle$	con $\{v_1, v_2\}$ lin. ind. Piani	2
$\mathbb{R}^3$	Tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$	3

Come descrivere sottovarietà lineari

1° modo : $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ punto $\quad W = \langle \underset{w}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \rangle$

Punto + Giacitura

$P + W$

$P + aw$

$\dim L = \dim W = 1$

2° modo: forma parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+t \\ 3t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 2+t \\ z = 3t \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+t \\ 3t \end{pmatrix}}$$

3° modo: equazioni cartesiane (per elim. dei parametri

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2+t \\ \cancel{z = 3t} \end{cases} \qquad t = \frac{z}{3}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \frac{z}{3} \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x = 1 \\ 3y - z = 6 \end{cases}}$$

Osservazione: se siamo in $\mathbb{R}^n$ e $\dim L = k$

1° modo: $P + \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ con $w_1, \dots, w_k$ lin. indip.

2° modo: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P + a_1 w_1 + \dots + a_k w_k$ con parametri $a_1, \dots, a_k$

k param. indipendenti.

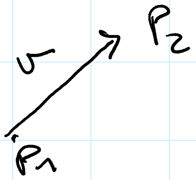
3° modo: L è soluzione di un sistema lineare

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{b} \qquad \text{con} \qquad rg(A) = rg(A|b) = n - k.$$

Nota bene:

1° modo: $L_1 = P_1 + W_1$ $\qquad L_1 = L_2 \iff \begin{cases} W_1 = W_2 \\ P_2 - P_1 \in W_1 \end{cases}$

$L_2 = P_2 + W_2$



$$v = P_2 - P_1$$

$$P_2 = P_1 + v$$

Intersezione di sottosp. lin. è sott. lin.

Intersezione di sottov. lin. è sott. lin.

3° modo: $L: A_1 \underline{x} = b_1$ $\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n = b_h \end{cases}$

$M: A_2 \underline{x} = b_2$ $\quad \begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \vdots \\ c_{k1}x_1 + \dots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$

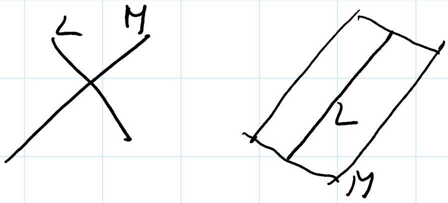
$$L \cap M: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n = b_h \\ c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \vdots \\ c_{k1}x_1 + \dots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

$L \cap \emptyset = \emptyset$

Definizione: date L e M sottovarietà lineari di $\mathbb{R}^n$ esse si dicono:

DISGIUNTE se $L \cap M = \emptyset$

INCIDENTI: se $L \cap M \neq \emptyset$



UGUALI o COINCIDENTI se $L = M$

PARALLELE: $L: P + V_L$ $\quad$ L e M si dicono parallele se

$M: Q + V_M$ $\quad$ $\dim V_L \leq \dim V_M$ allora

$\boxed{V_L \subseteq V_M}$ $\quad$ $L \parallel M$