Teorema spettrale.

Def: dato $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ endomorfismo si dice **spettro** di f l'insieme degli autovalori di f.

Data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice **spettro di A** l'insieme degli autovalori di A.

Domanda 18:

Data A matrice simmetrica allora A ha tutti autovalori reali (cioè $p_A(x)$ ha tutte le sue radici in $\mathbb{R}$).

Dim:

Ip: $A = A^t$ Tesi: $a \in \mathbb{C} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$ $a = \overset{\text{coniugato di } a}{\overline{a}}$

Sia $a \in \mathbb{C}$ autovalore di A allora esiste $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$

$v \in \mathbb{C}^n$: $Av = av$ $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ $z_i \in \mathbb{C}$

$\overline{v} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$ $\overline{v}^t v = (\overline{z_1} \dots \overline{z_n}) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\overline{z_i} z_i}_{\mathbb{R}, \geq 0} \geq 0$

notiamo che $\overline{v}^t v = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, perché

$\overline{z} z = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2 \geq 0$

$\boxed{A = A^t}$ $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \overline{A}$

$\boxed{Av = av}$ $\overline{Av} = \overline{A}\,\overline{v} = A\overline{v}$

$\overline{Av} = \overline{av} = \overline{a}\,\overline{v}$

$1 \times n \; n \times n \; n \times 1$

① $Av = av$ $\boxed{\overline{v}^t A v}$ è uno scalare $\mathbb{C}$

② $\boxed{A\overline{v} = \overline{a}\,\overline{v}}$

② $(A\overline{v})^t = \overline{a}\,\overline{v}^t$

$\overline{v}^t A^t = \overline{a}\,\overline{v}^t$ $A = A^t$ ② $\overline{v}^t A = \overline{a}\,\overline{v}^t$

① $\boxed{A v = a v}$ ② $(A\bar{v})^t = \bar{a}\,\bar{v}^t$

$\bar{v}^t A^t = \bar{a}\,\bar{v}^t$ $A = A^t$ ② $\bar{v}^t A = \bar{a}\,\bar{v}^t$

$$\bar{v}^t (A v) \overset{①}{=} \bar{v}^t (a v) = a\, \bar{v}^t v$$
$$(\bar{v}^t A) v \underset{②}{=} \bar{a}\, \bar{v}^t v \;//$$

$$\bar{a}(\cancel{\bar{v}^t v}) = a(\cancel{\bar{v}^t v})$$ ma essendo $v \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

$\boxed{\bar{v}^t v} = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i z_i \neq 0$

$\Downarrow$

$\bar{a} = a.$ $\square$

Riassunto $a \in \mathbb{C}$ autovalore e dim. $a = \bar{a}$

$v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ ① $A v = a v$

$A \bar{v} = \bar{a}\, \bar{v}$

② $\bar{v}^t A = \bar{a}\, \bar{v}^t$

$\uparrow$ perché $A = A^t$

$$\bar{v}^t A v = \begin{cases} ① & \bar{v}^t (A v) = a\, \bar{v}^t v \\ & \qquad\qquad \| \\ ② & (\bar{v}^t A) v = \bar{a}\, \bar{v}^t v \end{cases}$$

$\Longrightarrow a = \bar{a}$ perché $\bar{v}^t v \neq 0$ $\overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i z_i$.

Domanda 19:

Dimostrare che se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è simmetrica e a, b sono autovalori di A distinti allora V_a e V_b sono ortogonali fra loro: cioè $\boxed{\forall v \in V_a \;\; \forall w \in V_b \quad v \perp w}$

Dim: $v \perp w$ $v \cdot w = 0$

Ipotesi: $A = A^t$ $\boxed{v^t w = 0}$

Sia $v \in V_a$ cioè $\boxed{A v = a v} \leftarrow ①$ $A = A^t$

Sia $v \in V_a$ cioè $Av = av$ $\leftarrow$ ① $A = A^t$

$w \in V_b$ cioè $Aw = bw$ $w^t A^t \overset{\downarrow}{=} \boxed{w^t A = b w^t}$ ②

$$w^t(Av) \overset{①}{=} w^t(av) = a\, w^t v$$

$$(w^t A)\, v \underset{②}{=} b\, w^t v$$

$$a\, w^t v = b\, w^t v \qquad a \neq b \qquad a - b \neq 0$$

$$(\cancel{a-b})\, w^t v = 0 \implies w^t v = 0 \quad \text{cioè } v \perp w. \quad \square$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} m_a(0) &= 2 = m_g(0) \\ m_a(9) &= 1 = m_g(9) \end{aligned}$$

$$V_0 :\ 2x + y + 2z = 0 \qquad V_0 = \langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \rangle$$

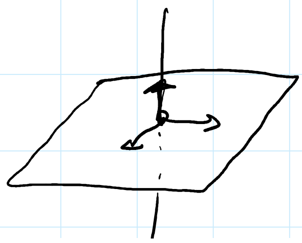
GS

$$B_{V_0} = \left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} -4/\sqrt{45} \\ -2/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}} \right\}$$

$A = A^t \implies \underset{2}{V_0}$ e $\underset{1}{V_9}$ sono ortogonali $v \perp w\ \ \forall v \in V_0\ \ \forall w \in V_9$

$$\implies \underset{1}{V_9} \subseteq \underset{1}{V_0^\perp} \implies V_0^\perp = V_9 = \langle \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \rangle \qquad \|v_3\| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \qquad B_{V_9} = \{u_3\}$$



$$H = (u_1\ u_2\ u_3) \in O_3(\mathbb{R})$$

$$H = \begin{array}{ccc} \\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} & 1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{pmatrix} \end{array} \in O_3(\mathbb{R}) \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 9 \end{array} \qquad \boxed{H^t A H = D}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ notiamo $A = A^t$

$\Rightarrow$ è ortogonalmente diagonalizzabile

Determinare $H \in O_3(\mathbb{R})$: $H^t A H = D$ con D diagonale.

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ -1 & -x & -2 \\ 1 & -2 & -x \end{pmatrix} =$$

$2° + 3° C$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ -1 & -x-2 & -2 \\ 1 & -2-x & -x \end{pmatrix} = \qquad \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$= (-x-2) \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} - (-2-x) \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\underline{(x+2)}(-x+x^2-1) + \underline{(x+2)}(-2+2x+1) =$$

$$= (x+2)(x - x^2 + \cancel{1} + 2x - \cancel{1}) = (x+2)(-x^2+3x) =$$

$$= (x+2)\, x\, (3-x)$$ Gli autovalori sono $-2, 0, 3$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

$m_a(-2) = 1 = m_g(-2)$

$m_a(0) = 1 = m_g(0)$

$m_a(3) = 1 = m_g(3)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$m_a(0) = 1 = m_g(0)$$
$$m_a(3) = 1 = m_g(3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-2} = \operatorname{Ker}(A + 2\mathbb{I}_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V_{-2} = \langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \rangle \qquad \|v_1\| = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$V_0 = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_0 = \langle \overset{v_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \rangle$$

controllare $v_1 \perp v_2$

$$\|v_2\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \qquad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \operatorname{Ker}(A - 3\mathbb{I}_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \langle \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \rangle$$

$v_3 \perp v_1$
$v_3 \perp v_2$

$$\|v_3\| = \sqrt{3} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$H = \underset{\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 3 \end{array}}{(u_1 \ u_2 \ u_3)} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Ultima domanda:

Teorema spettrale reale:

Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è simmetrica se e solo se ($\Longleftrightarrow$) A è ortogonalmente diagonalizzabile.

Dim:

"$\Longleftarrow$" se A è ort. diag. abbiamo visto precedentemente $A = A^t$.

"$\Longrightarrow$" Supponiamo A simmetrica allora abbiamo già dimostrato che A ha tutti autovalori reali.

Si dimostra per induzione su $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$.

$n = 1$ $A = (a_{11})$ è simmetrica ed è diagonale

$H = (1) \in O_1(\mathbb{R})$ $H^t A H = 1 \cdot a_{11} \cdot 1 = (a_{11})$

è ortogonalmente diagonalizzabile con $H = (1)$.

Supponiamo che tutte le matrici simmetriche $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ siano ortogonalm. diag. e dimostriamo che tutte le matrici simmetriche in $M_{n+1,n+1}(\mathbb{R})$ sono ort. diag. Supp vero n dim. $n+1$.

Sia $A \in M_{n+1,n+1}(\mathbb{R})$ simmetrica.

A ha tutti autovalori reali sia $a \in \mathbb{R}$ un autovalore di A

Sia v un suo autovettore $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ $v \neq 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$ $Av = av$

$u_1 = \dfrac{v}{\|v\|}$ e completiamo a base ortonormale di $\mathbb{R}^{n+1}$:

$B = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ $H = T_B^{\mathcal{E}}$ $H^{-1} A H = B$ $A \sim_{ort} B$

$A u_1 = a u_1$ $H \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow B = B^t$

$$B = H^{-1} A H = H^t A H = \left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ed essendo $B = B^t$ $\Longrightarrow C = C^t$ possiamo usare l'ipotesi induttiva cioè

$\exists\, K \in O_n(\mathbb{R}) : \quad K^t C K = D$ diagonale.

$$L = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K & \\ 0 & & & \end{array}\right) \in O_{n+1}(\mathbb{R})$$

$$L^t L = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & K^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & K \end{array}\right) = \mathbb{I}_{n+1}$$

$L^t B L = (L^{t}+1^{t})A(1+L)$ è ort. simile ad A

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K^t & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & K^tCK & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$ è diagonale. $\square$

Esercizio: 1° appello 26/6/2023 IC

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1) Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f_a(v) = M_a v$ è iniettiva? è suriettiva? è biiettiva?
Per i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui non è iniettiva determinare $\mathcal{B}_{\ker(f_a)}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f_a)}$.

2) $f_a^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

2) $f_a^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}\right) \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

3) Per quali $a \in \mathbb{R}$, f_a è diagonalizzabile?
Posto $a=-1$ determinare $H \in O_3(\mathbb{R})$ e D diagonale:
$H^{-1} M_{-1} H = D$.

Svolg:

1) $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

f_a è iniettiva $\Leftrightarrow$ è surr. $\Leftrightarrow$ è biiettiva $\Leftrightarrow$ $\det M_a \neq 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \; a \neq 0 \; a \neq -1.}$
perché f_a è endomorfismo.

$\det M_a = a(-2a-1) - a = -2a^2 - a - a = -2a^2 - 2a =$
$= -2a(a+1) \qquad \det M_a = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a=0 \\ a=-1 \end{matrix}$

$a=0 \qquad M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Im} f_0 = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim \operatorname{Im} f_0 = \operatorname{rg} M_0 = 2$

$B_{\operatorname{Im} f_0} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$

$B_{\operatorname{Ker} f_0} = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x-2y+z=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=-z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix}$

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f_0 + \dim \operatorname{Im} f_0$
$3 = 1 + 2$

$a=-1 \qquad M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x+y=0 \\ x-2y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=y \\ \cancel{y-2y+y=0} \\ z=y \end{cases} \qquad \begin{cases} x=y \\ z=y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker} f_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \dim \mathrm{Ker} f_{-1} = 1 \qquad \boxed{B_{\mathrm{Ker} f_{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f_{-1} = 2 \qquad B_{\mathrm{Im} f_{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

2) $f_a^{-1}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

$M_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & -1 \end{array} \right)$ Ridurre con Gauss.

$a \neq 0$ e $a \neq -1$ c'è un'unica soluzione

...

se $a=0$ o $a=-1$ o non avete sol. se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im} f_a$

oppure se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f_a$ avrete ∞ soluz. dipendenti da un parametro.

3) Essendo $M_a = M_a^t \ \forall a \in \mathbb{R}$ allora per il Teorema spettrale M_a è diagonalizzabile $\forall a \in \mathbb{R}$.

Se $a=-1$

$M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

determinare $H \in O_3(\mathbb{R})$ D diag.: $H^{-1} M_{-1} H = D$

$H = (u_1\, u_2\, u_3)$ con $\{u_1, u_2, u_3\}$ base ortonormale di

$H = (u_1\, u_2\, u_3)$ con $\{u_1, u_2, u_3\}$ base ortonormale di autovettori

$$P_{M_{-1}}(x) = \det\begin{pmatrix} -1-x & 1 & 0 \\ 1 & -2-x & 1 \\ 0 & 1 & -1-x \end{pmatrix} =$$

$+ \quad - \quad +$

$$= \boxed{(-1-x)}\Big(\underbrace{(-2-x)(-1-x)-1}_{}\Big) - \boxed{(-1-x)} =$$

$((x+2)(x+1)-1)$

$$= -(x+1)\big(\underline{x^2+3x+\cancel{1}}\ \cancel{-1}\big) = -(x+1)\,x\,(x+3)$$

$m_a(-1) = 1 = m_g(-1)$

$m_a(0) = 1 = m_g(0)$

$m_a(-3) = 1 = m_g(-3)$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$H = (u_1\ \ u_2\ \ u_3)$

$V_{-3} = \langle u_1 \rangle \qquad \|u_1\| = 1$

$V_{-1} = \langle u_2 \rangle \qquad \|u_2\| = 1$

$V_0 = \langle u_3 \rangle \qquad \|u_3\| = 1$

$u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ perché

$$V_0 = \operatorname{Ker} M_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$