Matrici ortogonali

Def. una matrice $K \in GL_n(\mathbb{R})$ (cioè in $M_{n,n}(\mathbb{R})$, $\det(K) \neq 0$) si dice **ortogonale** se

$$K^t K = K K^t = \mathbb{I}_n \quad \text{cioè} \quad K^{-1} = K^t.$$

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ K \in GL_n(\mathbb{R}) \mid K \text{ è ortogonale} \}$$

$$\mathbb{I}_n \in O_n(\mathbb{R})$$

Osservazione: se $K_1, K_2 \in O_n(\mathbb{R})$ allora $K_1 K_2 \in O_n(\mathbb{R})$ perché

$$(K_1 K_2)^t (K_1 K_2) = K_2^t (K_1^t K_1) K_2 = K_2^t \mathbb{I}_n K_2 = K_2^t K_2 = \mathbb{I}_n$$

$$\Rightarrow (K_1 K_2)^{-1} = (K_1 K_2)^t = K_2^t K_1^t.$$

Se $K \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow K^{-1} = K^t \in O_n(\mathbb{R})$ perché

$$(K^t)^t K^t = K K^t = \mathbb{I}_n \quad \text{cioè} \quad (K^t)^{-1} = (K^t)^t = K.$$

Isometrie di $\mathbb{R}^n$

Def: un endomorfismo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice **isometria** se

$$\boxed{v \cdot w = f(v) \cdot f(w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n}$$

Conseguenze:

1) $v = w$ $\quad \|v\|^2 = v \cdot v = f(v) \cdot f(v) = \|f(v)\|^2$

$$\|v\| = \|f(v)\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

2) se v, w sono vettori non nulli con angolo θ

$$\cos\Theta = \frac{v\cdot w}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{f(v)\cdot f(w)}{\|f(v)\|\,\|f(w)\|} = \cos\Theta_{f(v),f(w)}$$

$\Rightarrow \Theta$ è l'angolo fra $f(v)$ e $f(w)$

3) f manda basi ortonormali in basi ortonormali. ((1)+(2))

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f} = \big(f(e_1)\dots f(e_n)\big) = (u_1 \dots u_n)$$

Essendo $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ ortonormale
$\mathcal{B}=\{f(e_1),\dots,f(e_n)\}$ è base ortonormale

Oss: un'isometria è invertibile perché essendo $\{f(e_1),\dots,f(e_n)\}$ base di $\mathbb{R}^n$ $\dim \operatorname{Im} f = n \Rightarrow f$ suriettiva $\Rightarrow$ essendo endom. f iniettiva $\rightarrow f$ biiettiva

$K = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f} = (u_1 \dots u_n) \in O_n(\mathbb{R})$ perché

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1^t \\ u_2^t \\ \vdots \\ u_n^t \end{pmatrix}}_{K^t} (u_1 \dots u_n) = (u_i^t u_j)_{1\le i,j\le n} = \mathbb{I}_n$$

perché $u_i^t u_j = u_i \cdot u_j = \begin{cases} \|u_i\|^2=1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \text{ perché } u_i \perp u_j \end{cases}$

Nota bene:

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è isometria $\iff A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f} \in O_n(\mathbb{R})$.

"$\Rightarrow$" se è isometria $K=(u_1\dots u_n)\in O_n(\mathbb{R})$

"$\Leftarrow$" se $K = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f}$ e K ortogonale $\quad v\cdot w = v^t w$

$v\cdot w = f(v)\cdot f(w)$ isometria

$v\cdot w = (Kv)\cdot(Kw) = (Kv)^t(Kw) = v^t K^t K w = v^t w$

Osservazione:

$K \in O_n(\mathbb{R}) \iff$ le colonne di K sono una base ORTONORMALE

$\iff$ le righe di K sono una base ORTONORMALE.

Proposizione: se $H \in O_n(\mathbb{R})$ allora

1) $|\det(H)| = 1$

2) se $a \in \mathbb{R}$ è autovalore di H allora $|a| = 1$

Dim:

1) $H^t H = I_n$ Binet

$\det(H^t H) = \det(H^t)\det(H) = \det(H)^2 =$

$= \det(I_n) = 1$ $\quad \det(H)^2 = 1$ $\quad |\det(H)| = 1$

2) Se $a \in \mathbb{R}$ è autovalore di H $\quad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$f(v) = Hv$ è isometria

Se v è autovettore di H relativo all'autovalore a

$f(v) = av$ $\quad Hv = av$ $\quad v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ $\quad \|v\| \neq 0$

$\cancel{\|v\|} = \|f(v)\| = \|av\| = |a|\,\cancel{\|v\|} \implies |a| = 1$

Matrici ortogonali / isometrie di $\mathbb{R}^2$

$O_2(\mathbb{R})$

Dirette $\det(H) = 1$	**Inverse** $\det(K) = -1$
$H = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$K = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
$\det(H) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$\det K = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$
Rotazioni	Sono tutte diagonalizzabili

$$P_H(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta - x & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - x \end{pmatrix} =$$

$$= x^2 - 2\cos\theta\, x + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta =$$

$$= x^2 - 2\cos\theta\, x + 1$$

$$x_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}$$

$$\cos^2\theta - 1 \geq 0$$

ha autovalori reali $\iff \cos^2\theta = 1$

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad -\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_K(x) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta - x & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta - x \end{pmatrix} =$$

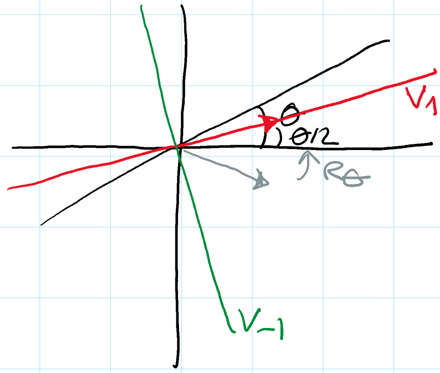
$$= \overset{(x-\cos\theta)(x+\cos\theta)}{(\cos\theta - x)(-\cos\theta - x)} - \operatorname{sen}^2\theta =$$

$$= x^2 - \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = x^2 - 1 =$$

$$= (x-1)(x+1)$$

$K \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cioè sono simmetrie ortogonali

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_\theta} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{S_{\text{asse } x}}$$



Isometrie di $\mathbb{R}^3$ / $O_3(\mathbb{R})$

Dirette $\det(H) = 1$

$\deg P_H(x) = 3 \Rightarrow$ hanno sempre un autovalore reale.

$a = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & H' \end{pmatrix}$ con

$H' \in O_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \det H' = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{pmatrix}$ Rotazioni attorno ad un asse

$a = -1$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \; 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & K \end{pmatrix}$ essendo $\det K = -1$ $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Inverse $\det(K) = -1$

$a = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ simmetrie $\perp$ di asse un piano

$a = -1$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{pmatrix}$

Esercizio: $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -a \end{pmatrix}$ per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ $H \in O_2(\mathbb{R})$?

Svolg:

1° metodo

$H^t H = I_n$

$$H^t H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & a \\ 1/\sqrt{2} & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}} & a^2 + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2a^2 = 1 \end{cases} \quad a^2 = \frac{1}{2} \quad \boxed{a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

2° metodo

$$H = \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \end{array}$$
$$H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & a \\ 1/\sqrt{2} & -a \end{pmatrix}$$

$\|u_1\| = 1$ $\quad \|u_2\| = \sqrt{a^2 + a^2} = 1$ $\quad \sqrt{2a^2} = 1$ $\quad 2a^2 = 1$

$a^2 = \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$u_1 \cdot u_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$

Definizione: un endomorfismo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice simmetrico se

$$\boxed{v \cdot f(w) = f(v) \cdot w \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n}$$

Proposizione:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è simmetrico $\Longleftrightarrow$ $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f} = A$ è simmetrica.

$f(v) = Av$ $\quad f(w) = Aw$

"Dim":

"$\Longleftarrow$" $\quad v \cdot Aw = Av \cdot w$ $\qquad \boxed{A = A^t}$ ipo

$v^t (Aw) = (Av)^t w =$

$= v^t A^t w = v^t A w$

$\Rightarrow$ se f è simmetrico

$$\boxed{v \cdot Aw = Av \cdot w}$$

$$\boxed{v^t A w = v^t A^t w} \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A = A^t$$

$v = e_i$, $w = e_j$: $\quad A_{ij} = A_{ji}$

Definizione: una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice **ortogonalmente simile** a $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ se esiste $H \in O_n(\mathbb{R})$ tale

$$H^{-1}AH = B \qquad \boxed{H^t A H = B} \qquad \text{perché } H^t = H^{-1}$$

$$A \sim_{ort} B$$

La matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice **ortogonalmente diagonalizzabile** se $A \sim_{ort} D$ con D diagonale.

Oss: se $A \sim_{ort} B \Rightarrow A \sim B$ ma il viceversa non è vero.

Domanda 17: se A è ortogonalmente diagonalizzabile allora A è simmetrica.

Dim:

$A \sim_{ort} D$ cioè $\exists\, H \in O_n(\mathbb{R})$ tale $H^{-1}AH = D \iff A = HDH^{-1}$

$A = HDH^t \qquad A^t = (HDH^t)^t = HD^tH^t = HDH^t = A$.

Oss: se B è simmetrica cioè $B=B^t$
$A \sim_{ort} B$ allora A è simmetrica.

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$V_0 = \operatorname{Ker} A \qquad \dim V_0 = 3 - \operatorname{rg} A = 3-1=2$

$m_g(0)=2 \Rightarrow m_a(0) \geq 2$

$\operatorname{tr} A = 9$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} 4-x & 2 & 4 \\ 2 & 1-x & 2 \\ 4 & 2 & 4-x \end{pmatrix} =$$

$$=(4-x)\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4-x \end{pmatrix} + 4\det\begin{pmatrix} 2 & 1-x \\ 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$=(4-x)(\cancel{4}-5x+x^2\cancel{-4}) -2(\cancel{8}-2x\cancel{-8}) +4(\cancel{4}\cancel{-4}+4x) =$$

$$=-2\cancel{0}x+5x^2+4x^2-x^3+\cancel{4x}+\cancel{16}x=$$

$$= -x^3+9x^2 = -x^2(x-9)$$ gli autovalori sono 0 e 9

$$V_0 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 4x+2y+4z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+2y+4z=0 \end{cases} \qquad y=-2x-2z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x-2z \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \underbrace{x,z\in\mathbb{R}}\right\} = \langle \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \rangle$$

ora con il procedimento di GS dobbiamo cercare una base ortonormale di V_0

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \|v_1\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$w_2 = v_2 - (v_2 \cdot u_1)\,u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 \\ -2/\sqrt5 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 \\ -2/\sqrt5 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt5} \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 \\ -2/\sqrt5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{4}{5} \\ -2 + \frac{8}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \cdot \frac{5}{\sqrt{45}}$$

$$\|w_2\| = \frac{1}{5} \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{16+4+25} = \frac{\sqrt{45}}{5}$$

$$\boxed{u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt5 \\ -2/\sqrt5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}}$$

$V_0 : 2x + y + 2z = 0$

$2 \quad 1 \quad 2$

$$V_9 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V_9 = \operatorname{Ker}(A - 9I_3) = \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

riduco con Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^\circ + 5 \cdot 1^\circ \\ 3^\circ - 4 \cdot 1^\circ \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2y \\ x = 4y - z = 4y - 2y = 2y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$