

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$\frac{z^3}{|z|} = \frac{2\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-2)i}{2+i} \bar{z}$$

e scriverle in forma esponenziale. Quante sono queste soluzioni?

Sol.

$$z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{z^3}{|z|} = \frac{2\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-2)i}{2+i} \bar{z}$$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$\rho = |z|$$

$$\rho \in \mathbb{R} \quad \rho > 0 \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$z^3 = \rho^3 e^{i3\theta}$$

abbiamo posto $\rho \neq 0$ perché $|z| = \rho$ e

$$\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$$

al denominatore

$$\frac{2\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-2)i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{4\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}i-4i-2\sqrt{3}i-i+\sqrt{3}-2}{5} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}-5i}{5} = \sqrt{3}-i =$$

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = 2 e^{-i\pi/6}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{z^3}{|z|} = \frac{2\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-2)i}{2+i} \bar{z}$$

$$\frac{\rho^3 e^{i3\theta}}{\rho} = 2 e^{-i\pi/6} \rho e^{-i\theta}$$

$$\rho e^{i3\theta} = 2 e^{-i\theta} e^{-i\pi/6}$$

moltiplichiamo per $e^{i\theta}$

$$\rho e^{i4\theta} = 2 e^{-i\pi/6}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ 4\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} s=2 \\ \theta_k = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

$$z_0 = 2 e^{-\frac{\pi}{24}i} = 2 e^{i \frac{47}{24}\pi}$$

$$z_1 = 2 e^{i(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2})} = 2 e^{i \frac{11}{24}\pi}$$

$$z_2 = 2 e^{i(-\frac{\pi}{24} + \pi)} = 2 e^{i \frac{23}{24}\pi}$$

$$z_3 = 2 e^{i(-\frac{\pi}{24} + \frac{3\pi}{2})} = 2 e^{i \frac{35}{24}\pi}$$

$$z_4 = 2 e^{i(-\frac{\pi}{24} + 2\pi)} = 2 e^{i \frac{47}{24}\pi} = z_0$$

4 radici distinte.

Esercizio 2:

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W : \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

- (a) Si determinino una base e la dimensione per ciascuno dei due sottospazi. (2 pt)
- (b) Si determini una base di $U \cap W$ e la si completi ad una base di $U + W$, indicando le dimensioni dei due sottospazi. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3 pt)
- (c) Aggiungere il minimo numero di equazioni al sistema lineare che definisce W per ottenere un sistema lineare che abbia come soluzioni i vettori del sottospazio $U \cap W$. Dire se le equazioni aggiunte al sistema sono univocamente determinate o se vi sono possibili alternative alla soluzione proposta. (2 pt)
- (d) Scrivere il vettore $v = e_2 + e_3 + e_4$ come somma $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Tale scrittura è unica? (2 pt)
- (e) Si determini un sottospazio T di $\mathbb{R}^5$ tale che $T \oplus (U \cap W) = U$. (1,5 pt)
- (f) Determinare un sottospazio S di $\mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus U = S \oplus W = \mathbb{R}^5$. (1,5 pt)

(voltare pagina)

$$a) V = \mathbb{R}^5 \quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ 2^\circ - 1^\circ \\ \\ 4^\circ - 3 \cdot 1^\circ \end{matrix} \quad \text{Riduciamo con Gauss}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Scambio } 2^\circ - 3^\circ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ 3^\circ + 5 \cdot 2^\circ \\ 4^\circ + 4 \cdot 2^\circ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{Ha rango} = 3 = \dim U \\ \text{quindi } U: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \end{matrix}$$

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ma anche } \{e_1, e_3, e_4\} \text{ è base di } U.$$

$$W: \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2x_1 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 - 2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim W = 3$$

Essendo U e W sottospazi di dimensione 3 in $\mathbb{R}^5$

$\dim U \cap W \geq 1 \Rightarrow$ non sono in somma diretta

b) Non sono in somma diretta

$$U \cap W: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2x_1 - 2x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 - 2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim U \cap W = 2 \quad B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{F. Grassmann} \quad \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 4$$

$$U \subseteq x_5 = 0 \Rightarrow U+W \subseteq x_5 = 0 \Rightarrow U+W = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$$

$$W \subseteq x_5 = 0$$

In alternativa $B_U \cup B_W$ genera $U+W$

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo con Gauss

$$\begin{array}{l} R_1 \\ R_5 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_6+2R_2 \\ R_4-R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\overline{B}_{U+W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per completare $B_{U+W} = \{u_1, u_2\}$ a base di $U+W$ consideriamo il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U+W$ ma $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ poi cerchiamo

un vettore $z \in U+W$ ma $z \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ 2a+b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{se prendiamo } z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ il sistema}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ 2a+b=1 \\ b=1 \\ 0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ 2a+1+b=3 \\ b=1 \\ 0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ a=3/2 \end{cases}$$

è impossibile quindi

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } U+W \text{ ottenuta completando } B_{U+W}.$$

anche

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } U+W \text{ ottenuta completando } B_{U+W}.$$

$$\textcircled{d} \quad W: \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$U \cap W \quad \dim(U \cap W) = 2$$

quindi il rango di un sistema lin.

che ha come soluzioni $U \cap W$ è $5-2=3 = n^\circ \text{ minimo di equazioni}$

$$U \cap W: \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Non è unica

$$U \cap W: \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

anche questo sistema di 3 eq. lin. indep. ha come soluzioni $U \cap W$.

d) $v = e_2 + e_3 + e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u + w \quad u \in U, w \in W \quad B_U = \{e_1, e_3, e_4\} \quad u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\otimes \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + w \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 1-b \\ 1-c \\ 0 \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$

Cioè $\begin{cases} -2a - 1 + b - 2 + 2c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad -2a + b + 2c - 3 = 0 \quad 2a - b - 2c = -3$

$a=0, c=0, b=3$ verifica $2a - b - 2c = -3$ sostituendo in $\otimes$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

la scrittura non è unica se ad esempio prendiamo

$$a = -1 \quad b = 1 \quad c = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \quad w' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$$

abbiamo ancora $2a - b - 2c = -3$

e) $T \subseteq \mathbb{R}^5 : T \oplus (U \cap W) = U$ quindi $B_T \cup B_{U \cap W}$ deve essere

una base di U . Cioè dobbiamo completare la base

$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ a base di U . Essendo $\dim U = 3$

e $\dim(U \cap W) = 2$ si ha $\dim T = 1$, quindi basta trovare un

ettore $u \in U \setminus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ ad esempio $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u$ verifica

La richiesta

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

f) $S \subseteq \mathbb{R}^5$: $S \oplus U = S \oplus W = \mathbb{R}^5$

essendo $\dim U = \dim W = 3 \Rightarrow \dim S = 2$

Consideriamo $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ base di $U \cap W$. Abbiamo visto che $u_3 \in U \setminus (U \cap W)$

$u_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ completa $B_{U \cap W}$ a base $\overline{B}_U = \{u_1, u_2, u_3\}$ è base di U .

Completiamo u_1, u_2 a base di W aggiungendo $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W \setminus U$

quindi $\overline{B}_W = \{u_1, u_2, w_3\}$ è base di W

infine ricordiamo che $U+W$ ha equazione $x_5 = 0$, quindi $e_5 \notin U+W$

Poniamo come $S = \langle u_3 + w_3, e_5 \rangle$

perché $S + U = \langle u_3 + w_3, e_5, u_1, u_2, u_3 \rangle =$

$$= \langle u_1, u_2, u_3, w_3, e_5 \rangle \text{ e}$$

u_1, u_2, u_3 sono lin. indep. $w_3 \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = U$ perché

$w_3 \in W \setminus U$ quindi u_1, u_2, u_3, w_3 sono lin. indep. e in $U+W$

$e_5 \notin \langle u_1, u_2, u_3, w_3 \rangle$ perché $e_5 \notin U+W$ quindi

$$\dim \langle u_1, u_2, u_3, w_3, e_5 \rangle = 5 \Rightarrow \dim(S \oplus U) = 5 \text{ essendo}$$

$$\dim S = 2 \quad \dim U = 3 \Rightarrow S \oplus U = \mathbb{R}^5$$

Analogamente $S + W = \langle u_3 + w_3, e_5, u_1, u_2, w_3 \rangle =$

$$= \langle u_1, u_2, u_3, w_3, e_5 \rangle = \mathbb{R}^5$$

quindi anche $S \oplus W = \mathbb{R}^5$.

Esercizio 3

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare dipendente dal parametro reale k reali nelle incognite reali x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_4 = k \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 + (1+k)x_4 = 1 \\ x_1 + kx_2 + (1-k^2)x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

1. Si determinino le soluzioni del sistema lineare al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per i valori di k per cui il sistema ha soluzioni scrivere le soluzioni nella forma $v + U$ con $v \in \mathbb{R}^4$ e $U \leq \mathbb{R}^4$. (4 pti)
2. Esistono dei valori di k tali che l'insieme delle soluzioni sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? (1 pto)
3. Per $k = -1$ esiste un sistema lineare di 2 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 che sia equivalente a quello dato? Per $k = -1$ esiste un sistema lineare di 4 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 che sia equivalente a quello dato? (1 pto)
4. Esiste un valore del parametro reale k tale che il sistema sia equivalente ad un sistema lineare di 1 sola equazione nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 ? (1 pto)

Svolgimento:

La matrice completa associata al sistema lineare è

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 0 & -1 & k \\ -1 & 1 & k^2 & 1+k & 1 \\ 1 & k & 1-k^2 & -1 & -1 \end{array} \right) \quad \text{Riduciamo con Gauss}$$

$$\begin{array}{l} 1^\circ \\ 2^\circ + 1^\circ \\ 3^\circ - 1^\circ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 0 & -1 & k \\ 0 & k+1 & k^2 & k & k+1 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 0 & -1-k \end{array} \right)$$

Se $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ $\text{rg} A = \text{rg}(A|b) = 3$ quindi il sistema ha soluzioni e $\dim \ker A = n^\circ \text{incognite} - \text{rg}(A) = 3$.

$$\begin{cases} (1-k^2)x_3 = -1-k & \Rightarrow x_3 = \frac{k+1}{k^2-1} = \frac{1}{k-1} \\ (k+1)x_2 + k^2x_3 + kx_4 = k+1 & \Rightarrow (k+1)x_2 = -\frac{k^2}{k-1} - kx_4 + k+1 = \\ x_1 + kx_2 - x_4 = k & \end{cases}$$

$$= \frac{k^2-1-k^2}{k-1} - kx_4 = -\frac{1}{k-1} - kx_4$$

quindi $x_2 = -\frac{1}{k^2-1} - \frac{k}{k+1}x_4$

$$x_1 = -kx_2 + x_4 + k =$$

$$= \frac{k}{k^2-1} + \frac{k^2}{k+1}x_4 + x_4 + k = \frac{k+k^3-k}{k^2-1} + \frac{k^2+k+1}{k+1}x_4$$

$$S_{A|b} = \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{k^3}{k^2-1} + \frac{k^2+k+1}{k+1} x_4 \\ -\frac{1}{k^2-1} - \frac{k}{k+1} x_4 \\ \frac{1}{k-1} \\ x_4 \end{array} \right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \frac{k^3}{k^2-1} \\ -\frac{1}{k^2-1} \\ \frac{1}{k-1} \\ 0 \end{array} \right) + \left\langle \begin{array}{c} \frac{k^2+k+1}{k+1} \\ -\frac{k}{k+1} \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\rangle$$

se $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Se $k = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{rg } A = \text{rg } A|b = 2$ per Rouché-Capelli il sistema ha soluzioni e

$$\dim \text{Ker } A = 4 - 2 = 2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 - 1 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$S_{A|b} = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_2 + x_4 - 1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{array} \right) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\rangle \quad k = -1$$

Se $k = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$$\text{rg } A = 2 \neq \text{rg } A|b = 3$$

il sistema non ha soluzioni.

$$S_{A|b} = \begin{cases} \left(\begin{array}{c} \frac{k^3}{k^2-1} \\ -\frac{1}{k^2-1} \\ \frac{1}{k-1} \\ 0 \end{array} \right) + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{k^2+k+1}{k+1} \\ -\frac{k}{k+1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle & \text{se } k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle & \text{se } k = -1 \\ \emptyset & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

2) No non esistono dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $S_{A|b}$ è un sottospazio perché $b = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è mai uguale a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) Se $k = -1$ abbiamo visto che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{essendo } \text{rg} A = \text{rg}(A|b) = 2.$$

Esiste un sistema di 4 equazioni equivalente a questo in quanto è sufficiente aggiungere equazioni multiple delle precedenti ad esempio

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

4) Per $k = 1$ il sistema è impossibile quindi è equivalente al sistema lineare $\begin{cases} 0 = 1 \end{cases}$ di una equazione su 4 incognite ovvero con matrice completa $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 1$