Richiami:

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n \qquad A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

$$f : V \to V \quad \dim V = n$$

Criterio di diagonalizzazione:

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile $\iff \begin{cases} (A) \ p_A(x) \text{ abbia tutte radici in } \mathbb{R} \\ (B) \ m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \ \forall \lambda \text{ autovalore di } A. \end{cases}$

Esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad n = 3$$

determinare $H \in GL_3(\mathbb{R})$: $H^{-1} A H = D$ con D diagonale.

Svolg.:

1° Passo: $p_A(x) = \det(A - x\, I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 3 & 7 \\ 0 & 4-x & 2 \\ 0 & 0 & 6-x \end{pmatrix} =$

$= (1-x)(4-x)(6-x)$

2° Passo: gli autovalori sono gli zeri di $p_A(x)$.

$p_A(x) = 0 \iff x = 1$ oppure $x = 4$ oppure $x = 6$

quindi gli autovalori sono $1 + 1 + 1 = 3 = n$ $p_A(x)$ ha tutte radici reali

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) = 1 \implies m_g(\lambda) = 1$$

$1 \quad m_a(1) = 1 \implies m_g(1) = 1$

$4 \quad m_a(4) = 1 \implies m_g(4) = 1$

$6 \quad m_a(6) = 1 \implies m_g(6) = 1$

$\implies$ A è diagonalizzabile per il criterio di diagonalizzazione.

3° Passo: Calcolare gli autospazi $V_\lambda := \operatorname{Ker}(A - \lambda\, I_n)$

$$V_1 = \operatorname{Ker}(A - 1\mathbb{I}_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = A$$

$$m_g(1) = n - rg(A - 1\mathbb{I}_3) = 3 - 2 = 1$$

$$\begin{cases} 5z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = 0 \end{cases} \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad B_1 = \Big\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \Big\}$$

$$V_4 = \operatorname{Ker}(A - 4\mathbb{I}_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad m_g(4) = 3 - rg(A - 4\mathbb{I}_3) = 3 - 2 = 1$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ -3x + 3y + 7z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad B_4 = \Big\{ \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \Big\}$$

$$V_6 = \operatorname{Ker}(A - 6\mathbb{I}_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_g(6) = 3 - rg(A - 6\mathbb{I}_3) = 3 - 2 = 1$$

$$\begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -5x + 3y + 7z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = z \\ -5x + 10z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = z \\ x = 2z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \qquad V_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B_6 = \Big\{ \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \Big\}$$

4° Passo:

$$B = B_1 \cup B_4 \cup B_6 = \Big\{ \underset{1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{6}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \Big\}$$

$$H = T_B^{\mathcal{E}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \;\;1 \quad\; 4 \quad\; 6 \end{array} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A \sim D$$

$$H^{-1}AH = D \qquad \cancel{H}\cancel{H^{-1}}AH = HD \qquad \boxed{AH = HD}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}} \underset{H}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \underset{H}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

Domanda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$A \sim M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 18 & 4 & 0 \\ 21 & 35 & 1 \end{pmatrix}$ M ha $p_M(x) = (6-x)(4-x)(1-x) = p_A(x)$

$\Rightarrow m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$

$\begin{cases} M \sim D \\ A \sim D \end{cases}$ perciò $A \sim M$

$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = D$

$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 6 & * \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim D$

Corollario: se $f: V \to V$ è endomorfismo di V con $\dim V = n$ avente n autovalori reali distinti tra loro allora f è diagonalizzabile.
Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ con n autovalori distinti fra loro allora A è diagonalizzabile.

Dim:

Per ipotesi tutti gli autovalori sono reali tutti con molteplicità algebrica 1 quindi essendo $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ tutti hanno molteplicità geometrica 1 quindi f (risp. A) è diagonalizzabile. $\square$

Esempio: $A_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4K \\ 1 & K & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ A_K è diagonalizzabile?

2) Per $K=1$ determinare una base di autovettori per A_1.

3) La matrice A_1 è simile alla matrice $C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 24 \\ 0 & 2 & 32 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Svolg.:

Passo 1: $p_{A_K}(x) = \det(A_K - x\mathbb{I}_3)$

$$\det\begin{pmatrix} -x & 0 & 4K \\ 1 & K-x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} = (K-x)\det\begin{pmatrix} -x & 4K \\ 1 & -x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$= (K-x)(x^2-4K)$$

Passo: autovalori con $m_a(d)$

$x = K$

$x^2 - 4K = 0 \qquad x^2 = 4K \qquad$ ha soluzioni reali $\iff K \geq 0$

$\forall K \in \mathbb{R}$ con $K<0$ la matrice A_K non è diagonalizzabile perché non ha tutti autovalori reali.

Se $K \geq 0$ gli autovalori sono $\underset{d_1}{K} \quad \underset{d_2}{2\sqrt{K}} \quad \underset{d_3}{-2\sqrt{K}}$

osserviamo che $d_2 = d_3$ se e solo se $K=0$

Se $K=0$ gli autovalori sono $0 \quad 0 \quad 0$

cioè vi è un unico autovalore 0 con $m_a(0)=3$

$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_g(0) = 3 - rg(A_0 - 0\mathbb{I}_3) = 3-1 = 2 \neq 3 = m_a(0)$

$\Rightarrow A_0$ non è diagonalizzabile perché $m_g(0) \neq m_a(0)$

Se $K>0 \qquad \underset{d_1}{K} \quad \underset{d_2}{2\sqrt{K}} \quad \underset{d_3}{-2\sqrt{K}} \qquad \boxed{\begin{matrix} d_1>0 \\ d_2>0 \end{matrix}}$ quindi

$d_3<0$

certamente $\quad \lambda_1 \neq \lambda_3 \quad \lambda_2 \neq \lambda_3 \quad m_a(\lambda_3)=1 \Rightarrow m_g(\lambda_3)=1$

Quando $\lambda_1=\lambda_2$?

$K = 2\sqrt{K} \qquad K>0 \quad K\neq 0$

$K^2 = 4K \qquad \boxed{K=4}$

Se $K\in\mathbb{R}$, $K>0$ e $K\neq 4$ la matrice A_K ha 3 autovalori reali distinti $\Rightarrow$ A_K è diagonalizzabile

Se $K=4$ gli autovalori sono $\quad K \quad 2\sqrt{K} \quad -2\sqrt{K}$

$\qquad 4 \quad 4 \quad -4$

$4 \quad \boxed{m_a(4)=2 \neq m_g(4)=1}$ non è diagonalizzabile.

$-4 \quad m_a(-4)=1 \Rightarrow m_g(-4)=1$

$$A_4=\begin{pmatrix}0&0&16\\1&4&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$m_g(4) = 3-rg\left(A_4-4I_3\right) = 3-rg\begin{pmatrix}-4&0&16\\1&0&0\\1&0&-4\end{pmatrix} = 3-2=1$$

1) A_K è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $\boxed{K\in\mathbb{R},\ K>0,\ K\neq 4}$

$x^2 = 4K = -4(-K)$

Osservazione: $K<0 \quad \lambda_1 = K \quad \lambda_2 = 2i\sqrt{-K} \quad \lambda_3=-2i\sqrt{-K}$

A_K per $K<0$ è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ perché ha 3 autovalori complessi distinti fra loro, mentre non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

2) $A_K = \begin{pmatrix}0&0&4K\\1&K&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\qquad$ se $K\in\mathbb{R} \quad K>0 \quad K\neq 4$

$K \quad 2\sqrt{K} \quad -2\sqrt{K}$

$m_a(\lambda)=m_g(\lambda)=1$

$K=1 \qquad A_1=\begin{pmatrix}0&0&4\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad 1 \quad 2 \quad -2$

è diagonalizzabile $A_1 \sim D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$V_{-2} = Ker(A_1 + 2\mathbb{I}_3) = Ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = -2z \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2z \\ y = \frac{2}{3} z \end{cases}$ $\begin{pmatrix} -2z \\ \frac{2}{3} z \\ z \end{pmatrix}$ $V_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$\boxed{B_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}}$ $\quad = \left\langle \underset{v_1}{\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \right\rangle$

$V_1 = Ker(A_1 - 1\mathbb{I}_3) = Ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -x + 4z = 0 \\ x = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_1 = \left\langle \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$ $\quad \boxed{B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$

$V_2 = Ker(A_1 - 2\mathbb{I}_3) = Ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$ $\quad V_2 = \left\langle \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$ $\quad \boxed{B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

Una base di autovettori è $\mathcal{B} = \{ v_1, v_2, v_3 \}$

$H = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$H^{-1} A H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$ $\quad$ per cosa verificate $\boxed{AH = HD}$

c) $A_1 \sim D$ $\qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 24 \\ 0 & 2 & 32 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ perché

$p_C(x) = (-2-x)(2-x)(1-x)$ quindi C ha $-2, 1, 2$ come autovalori tutti di $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$

$$\begin{cases} A_1 \sim D \\ C \sim D \end{cases} \implies A_1 \sim C$$

Proposizione: siano $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

1. se A è diagonalizzabile ed $A \sim D$ con D diagonale, allora $B \sim A$ se e solo se $B \sim D$ cioè se e solo se B è diagonalizzabile e $p_A(x) = p_B(x)$
2. se $A \sim B \implies p_A(x) = p_B(x)$ hanno stessi autovalori e per ogni autovalore $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

Oss: $A \sim D$ $\qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{H^{-1}AH = D}$$

$$\cancel{H}\cancel{H^{-1}}A\cancel{H}\cancel{H^{-1}} = HDH^{-1}$$

$$\boxed{A = HDH^{-1}}$$

A^{1000}

$$A^2 = A \cdot A = HDH^{-1}HDH^{-1} = HD^2H^{-1} = H\mathbb{I}_4H^{-1} = \mathbb{I}_4$$

$$A^3 = HD\cancel{H^{-1}}\cancel{H}D\cancel{H^{-1}}\cancel{H}DH^{-1} = HD^3H^{-1}$$

$$A^m = HD^mH^{-1} = H\begin{pmatrix} (1)^m & & & \\ & (-1)^m & & \\ & & (-1)^m & \\ & & & (-1)^m \end{pmatrix}H^{-1} = \begin{cases} \mathbb{I}_4 & \text{se } m \text{ è pari} \\ D & \text{se } m \text{ è dispari.} \end{cases}$$

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -108 & 5 \\ -108 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 20 \end{pmatrix} \quad S = S^t \Rightarrow S \text{ è diagonalizzabile}$$

e esiste una base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale (versori = vettori di lunghezza 1 e a due a due ortogonali fra loro) di autovettori per S.

Prodotto scalare:

Definizione: definiamo prodotto scalare usuale o euclideo di $\mathbb{R}^n$

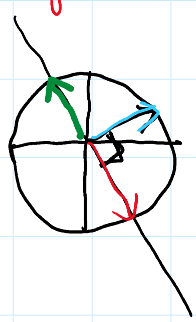
$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v, w \in \mathbb{R}^n$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$v \cdot w = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underset{1\times n \; n\times 1}{v^t w} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Esempi $\mathbb{R}^2$:



$$v = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$v \cdot w = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

Proprietà del prodotto scalare:

1) Bilinearità:

$$(a_1 v_1 + a_2 v_2) \cdot w = a_1 v_1 \cdot w + a_2 v_2 \cdot w$$

$$v \cdot (a_1 w_1 + a_2 w_2) = a_1 v \cdot w_1 + a_2 v \cdot w_2$$

2) Simmetrico $\quad v \cdot w = w \cdot v$

3) Definito positivo: $\quad v \cdot v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

$$v \cdot v = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0 \qquad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$v \cdot v = 0 \iff v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$