Autovalori e autovettori

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad f(v) = \lambda v \quad v \in V \quad v \neq 0_V$

λ autovalore $\quad v$ autovettore rel. a λ

$$(f - \lambda \, id_V)(v) = 0_V$$

$$(A - \lambda \mathbb{I}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{I}_n) = m_g(\lambda) \geq 1$$

Proposizione: sia $f: V \to V$ endomorfismo $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di f se e solo se $p_f(\lambda) = 0$.

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di A se e solo se $p_A(\lambda) = 0$.

Dim:

$\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore per $A \iff \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{I}_n) \geq 1 \iff$
$\det(A - \lambda \mathbb{I}_n) = 0 \iff p_A(\lambda) = 0$

essendo $p_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n)$ $\quad \square$

Esercizio: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sia autovettore di f di autovalore $d=-4$.

a) Determinare $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f}$.

b) Determinare gli autovalori di A e basi per gli autospazi di A

c) Determinare, se esiste, $H \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$H^{-1}AH=D$ con D diagonale

Svolg.:

$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\quad w_1=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ $\quad f(v_1)=w_1$

$v_2=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ $\quad w_2=\begin{pmatrix}0\\-6\\-3\end{pmatrix}$ $\quad f(v_2)=w_2$

$v_3=\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad f(v_3)=-4v_3 \quad w_3=-4v_3=\begin{pmatrix}0\\12\\4\end{pmatrix}$ $\quad f(v)=dv$

$f(v_3)=w_3$

$B=\{v_1,v_2,v_3\}$ è base di $\mathbb{R}^3$, quindi esiste un'unica applicazione lineare tale che $f(v_i)=w_i \quad \forall\, i=1,2,3$.

$$\left(\begin{array}{c|c} v_1 & w_1\\ v_2 & w_2\\ v_3 & w_3\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 & -2\\ 0 & 3 & 0 & 0 & -6 & -3\\ 0 & -3 & -1 & 0 & 12 & 4\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{3}\, 2^\circ R\\ 3^\circ+2^\circ\end{array}$$

Riduciamo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 6 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} 1^\circ-2\cdot 2^\circ\\ \\ -1\cdot 3^\circ\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & -1\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} e_1 & f(e_1)\\ e_2 & f(e_2)\\ e_3 & f(e_3)\end{array}\right)$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -6\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=A$$

b) Autovalori:

$$P_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_3) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -2-x & -6 \\ 0 & -1 & -1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (1-x)\det\begin{pmatrix} -2-x & -6 \\ -1 & -1-x \end{pmatrix} = (1-x)\left[(x+2)(x+1) - 6\right] =$$

$$= \boxed{(1-x)}\boxed{\left[x^2+3x-4\right]}$$

Trovare le radici $P_A(x) = 0 \iff$ $\boxed{1-x=0 \qquad x=1}$

$\boxed{x^2+3x-4=0}$

$$\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm5}{2} = \begin{cases} \boxed{-4} \\ \boxed{1} \end{cases}$$

$$P_A(x) = (1-x)(x+4)(x-1) = -(x-1)^2(x+4)$$

Gli autovalori di A sono 1 e -4

$$\boxed{\begin{matrix} m_a(1) = 2 \\ m_a(-4) = 1 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

$$V_1 = \operatorname{Ker}(A - 1\cdot\mathbb{I}_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim V_1 = 3 - rg(A - \mathbb{I}_3) = 3 - 1 = 2 = m_g(1)$$

$y + 2z = 0 \qquad y = -2z \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \qquad x, z \in \mathbb{R}$

$$\boxed{B_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$V_{-4} = \operatorname{Ker}(A+4\mathbb{I}_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim V_{-4} = 3 - rg(A+4\mathbb{I}_3) = 3-2 = 1 = m_g(-4)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R} \qquad \boxed{B_{V_{-4}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

c) $H \in GL_3(\mathbb{R})$: $\quad H^{-1}AH = D$

$$B = B_{V_1} \cup B_{V_{-4}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underset{-4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$ è base di $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{H = T_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}} \qquad A \sim D$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -4 \end{array}$$

$$\boxed{K = T_{B'}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad A \sim D'$$

$$\begin{array}{ccc} -4 & 1 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} -4 & 1 & 1 \end{array}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \sim D''$$

Definizioni: sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e λ un autovalore di A si dice molteplicità algebrica di λ $m_a(\lambda)$ è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico

$$P_A(x) = (x-\alpha)^{m_a(\alpha)} q(x) \qquad q(\alpha) \neq 0$$

moltiplicità geometrica di α $\quad m_g(\alpha) = \dim V_\alpha$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_2) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

A ha un unico autovalore 1 di $m_a(1) = 2$

$$m_g(1) = \dim V_1 = 2 - rg(A - 1\cdot\mathbb{I}_2) = 2 - rg\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} m_a(1) = 2 \\ m_g(1) = 1 \end{matrix}}$$

Non è diagonalizzabile perché non esiste una base di $\mathbb{R}^2$ di autovettori di A.

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{\mathbb{I}_2}(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 \qquad 1$$

$m_a(1) = 2$

$$m_g(1) = \dim V_1 = 2 - rg(\mathbb{I}_2 - 1\mathbb{I}_2) = 2 - rg\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 0 = 2$$

Domanda 10:

Lemma: se α_1 e α_2 sono autovalori distinti per una matrice A allora V_{α_1} e V_{α_2} sono in somma diretta

Dim:

$\alpha_1 \neq \alpha_2$ $\qquad$ sia $\boxed{v \in V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}}$

$$\begin{matrix} v \in V_{\alpha_1} \\ v \in V_{\alpha_2} \end{matrix} \quad \begin{cases} Av = \alpha_1 v \\ Av = \alpha_2 v \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 v = \alpha_2 v \qquad (\alpha_1 - \alpha_2) v = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$\Rightarrow v = 0_V$. $\qquad \square$

$f: V \to V$ endom. $\begin{cases} f(v) = d_1 v \\ f(v) = d_2 v \end{cases} \Rightarrow d_1 v = d_2 v \quad (d_1 - d_2) v = 0_V \Rightarrow v = 0_V$

perché $d_1 - d_2 \neq 0$ $\square$

Proposizione: sia d autovalore di $f: V \to V$ con $\dim V = n$

$$\boxed{1 \leq m_g(d) \leq m_a(d) \leq n}$$

Dim:

$m_g(d) \geq 1$ perché d è autovalore

$m_g(d) \leq m_a(d)$ $\qquad m_g(d) = K \quad \dim V_d = K$

sia $B_d = \{v_1, \dots, v_K\}$ base dell'autospazio V_d e completiamola a base di V $\quad B = \{v_1, \dots, v_K, v_{K+1}, \dots, v_n\}$

$$A = A_{B,B,f} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{d\ 0\ 0}}^{K \text{ colonne}} \ \overbrace{\hphantom{E}}^{n-K \text{ colonne}} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} d & 0 & 0 & \\ 0 & d & 0 & E \\ \vdots & 0 & d & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & F \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} K \text{ righe} \\ \\ \\ n-K \text{ righe} \end{array}$$

$E \in M_{K, n-K}(\mathbb{R})$

$F \in M_{n-K, n-K}(\mathbb{R})$

$$p_f(x) = p_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n)$$

$$= \det \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{d-x\ 0\ \dots\ 0}}^{K\text{-colonne}} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} d-x & 0 & \dots & 0 & \\ & d-x & & & E \\ 0 & \dots & 0 & d-x & \\ \hline 0 & \dots & & 0 & \\ 0 & \dots & & 0 & F - x\mathbb{I}_{n-K} \end{array}\right) \end{array} = (d-x)^K \underbrace{\det(F - x\mathbb{I}_{n-K})}_{p_1(x)}$$

$\Rightarrow$ d è radice di $p_A(x)$ con molteplicità almeno K

$p_A(x) = (d-x)^K p_1(x) \qquad K = m_g(d) \leq m_a(d)$

essendo $\deg p_A(x) = n$ cioè grado di $p_A(x) = n$

$m_a(d) \leq n$ $\qquad$ (questo succede $p_A(x) = (d-x)^n$).

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

$A = R_{\frac{\pi}{2}}$

$f(v) = dv$

$$p_A(x) = \det(A - x I_2) = \det\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

$\Rightarrow$ A non ha autovalori reali $\Rightarrow$ non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

A in $M_{2,2}(\mathbb{C})$ $A \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ $x^2+1=0$ $x^2=-1$

$x = i$ oppure $x = -i$

$1 \le m_g(i) \le m_a(i) = 1$

Teorema : Criterio di diagonalizzabilità:

Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile (in $\mathbb{R}$) se esclo valgono le due condizioni:

(A) $p_A(x)$ abbia tutte le radici in $\mathbb{R}$.

(B) $m_a(d) = m_g(d)$ $\forall\, d$ autovalore di A.

Dim:

Se A è diagon. $\Rightarrow$ valgono (A) e (B)

$$A \sim D = \begin{pmatrix} d_1 I_{n_1} & & & \\ & d_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_k I_{n_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & d_1 & & & & \\ & & & d_2 \ddots d_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & d_k \ddots d_k & \end{pmatrix}$$

$d_i \ne d_j$ se $i \ne j$

La matrice A ha come autovalori d_1 $m_a(d_1) = n_1$

$\vdots$

d_k $m_a(d_k) = n_k$

$p_A(x) = p_D(x) = \boxed{(d_1 - x)^{n_1} (d_2 - x)^{n_2} \cdots (d_k - x)^{n_k}}$ ricordando che

$\deg p_A(x) = n$ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ quindi ha tutte le radici reali

$$m_g(d_1) = \dim V_{d_1} = n - \underset{n-n_1}{rg(D - d_1 I_n)} = n-(n-n_1) = n_1 = m_a(d_1)$$

Viceverse se valgono A e B siano $d_1, .., d_k$ tutti gli autovalori di A $V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \cdots \oplus V_{d_k} \leq V = \mathbb{R}^n$

è necessario e sufficiente $\dim(V_{d_1} \oplus \cdots \oplus V_{d_k}) = n$

$n_i = m_a(d_i) = m_g(d_i)$ $\qquad$ $n_1 + \cdots + n_k = n$ $\qquad$ $\square$.

Passo 1 $p_A(x)$

Passo 2 autovalori e autospazi