Definizione: $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dicono **simili** se esiste una matrice $H \in GL_n(\mathbb{R})$ (cioè invertibile) tale che

$$H^{-1}AH = B. \qquad A \sim B \quad \text{"è simile"}$$

Relazione di equivalenza:

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. $A \sim B$ e $B \sim C$ allora $A \sim C$.

Classe di equivalenza

$$[A]_{\sim} = \{ B \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid B \sim A \}$$

Osservazione:

Sia $f: V \to V$ endomorfismo e $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi di V.

$A = A_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1,f}$ $\qquad B = A_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2,f}$ allora $A \sim B$ perché

$$\begin{tikzcd}
(V,\mathcal{B}_1) \arrow[r, "A"] & (V,\mathcal{B}_1) \arrow[d, "T^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}"] \\
(V,\mathcal{B}_2) \arrow[u, "T^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}"] \arrow[r, "B"] & (V,\mathcal{B}_2)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \arrow[d, "id_V"] \\
\cdot \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

$$T^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} \, A \, T^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2} = B$$

Sia $H = T^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}$ $\qquad H^{-1}AH = B$

$H^{-1} = T^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}$

Viceversa se $A \sim B$ essendo $B = H^{-1}AH$ $\qquad \mathcal{B}_1 = \mathcal{E} \quad V = \mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$

$A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f}$ cioè $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$B = A_{\mathcal{B},\mathcal{B},f}$ $\qquad H = T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$

Riassunto: matrici simili descrivono lo stesso endomorfismo in basi diverse.

Esempio:

$\mathbb{I}_n$ determinare tutte le matrici simili a $\mathbb{I}_n$ cioè $[\mathbb{I}_n]_\sim$

$\mathbb{I}_n \sim A$ se $\exists$ H tale $H^{-1}(\mathbb{I}_n H) = A \Rightarrow \mathbb{I}_n = A$.

"Avere la residenza con" è una relazione di equivalenza.

La matrice $\mathbb{I}_n$ risiede da sola, è single.

$a\mathbb{I}_n$ con $a \in \mathbb{R}$ si chiama matrice scalare

$a\mathbb{I}_n \sim A$ $\quad H^{-1}(a\mathbb{I}_n)H = A$ $\quad a\mathbb{I}_n = A$. Quindi

$100\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non sono simili fra loro

ma hanno lo stesso determinante $\det 100\,\mathbb{I}_2 = 10000$

Definizione: una matrice $D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice diagonale se

$D_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \qquad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \qquad d_{ii} \in \mathbb{R} \;\; \forall i = 1, \dots, n.$

Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice diagonalizzabile se $A \sim D$ con D matrice diagonale. Cioè esiste $H \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $\boxed{H^{-1}AH = D}$

Proposizione: se $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e $A \sim B$ allora $\det(A) = \det(B)$.

Dim:

Per definizione esiste $H \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che

$$\boxed{H^{-1}AH = B}$$

Teorema di Binet $\det(M_1 M_2) = \det(M_1)\det(M_2)$

$1 = \det(\mathbb{I}_n) = \det(H^{-1}H) = \det(H^{-1})\det(H)$ cioè $\det(H^{-1}) = \dfrac{1}{\det(H)}$

$\det(B) = \det(H^{-1}AH) \overset{\text{per Binet}}{=} \det(H^{-1})\det(A)\det(H) =$

$$= \frac{1}{\cancel{\det(H)}} \det(A) \cancel{\det(H)} = \det(A). \qquad \square$$

Controesempio: se due matrici hanno lo stesso determinante non sono necessariamente simili fra loro.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_n è simile solo all'I_n quindi I_n non è simile $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = B$ $\quad A$ è simile a B?

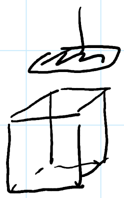
No perché $\det(A) \neq \det(B)$.

Osservazione: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che A sia diagonalizzabile, allora esiste $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ tale che $H = T_B^{\mathcal{E}}$ $\quad H^{-1}AH = D$ con D diagonale

$$D = A_{B,B,f} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & & \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$v_1 \in B$ calcolo $f(v_1) = d_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 v_n = d_1 v_1$

$$\begin{cases} f(v_1) = \underline{d_1} v_1 \\ f(v_2) = \underline{d_2} v_2 \\ \vdots \\ f(v_n) = \underline{d_n} v_n \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Definizione: Sia $f: V \longrightarrow V$ endomorfismo, uno scalare $d \in \mathbb{R}$ si dice **autovalore di f** se esiste un vettore $v \in V$ $\; v \neq 0_V$ tale che

$$\boxed{f(v) = dv}.$$

Il vettore v si dice **autovettore relativo all'autovalore d**.

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice autovalore di A se esiste un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tale che $\boxed{A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$

Osservazione: Se $v = 0_V$ $f(0_V) = \lambda 0_V$ $\forall \lambda$ numero reale quindi è ESSENZIALE chiedere $v \in V$ $v \neq 0_V$ altrimenti ogni numero reale sarebbe autovalore.

Endomorfismi	Matrici
$f(v) = \lambda v \qquad v \neq 0_V$	$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
$f(v) - \lambda v = f(v) - \lambda\, id(v) = 0_V$	$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
$(f - \lambda id_V)(v) = 0_V$ $f(v) - \lambda\, id_V(v) = 0_V$	$(A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
$v \in Ker(f - \lambda id_V)$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Ker(A - \lambda I_n)$

Definizione: se λ è autovalore per un endomorfismo $f: V \to V$ si dice autospazio di f relativo all'autovalore λ

$$V_\lambda := Ker(f - \lambda id_V) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

$$V_\lambda := Ker(A - \lambda I_n)$$

$$\boxed{m_g(\lambda) = \dim V_\lambda \geq 1}$$

molteplicità geometrica dell'autovalore λ

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ verifichiamo che 0 e 3 sono autovalori e determiniamo V_0 e V_3

$A v = 0 v \qquad v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$A w = 3 w$

$$V_0 = \operatorname{Ker}(A - 0\,\mathbb{I}_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\underline{m_g(V_0)} = 3 - rg(A - 0\mathbb{I}_3) = 3 - 1 = \underline{2} \qquad z = -x-y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$$

$$\underline{V_0} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore 0 $\quad A v = 0 \cdot v$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \operatorname{Ker}(A - 3\,\mathbb{I}_3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^\circ + 2\cdot 1^\circ \\ 3^\circ - 1^\circ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_g(3) = \dim V_3 = 3 - rg(A - 3\mathbb{I}_3) = 3 - 2 = 1$$

$$V_3 \quad \begin{cases} x+y-2z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y+2z=-z+2z=z \\ y=z \end{cases} \quad \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad w=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Aw=3\cdot w$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{V_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad B_{V_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è base di } \mathbb{R}^3$$

$$\qquad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 3$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Osservazione: se d è autovalore di $f: V \to V$

$$f(v) = dv \qquad \exists\, v \in V \quad v \neq 0_V$$

$$\operatorname{Ker}(f - d\, id_V) \neq \{0_V\} \qquad \operatorname{Ker}(A - d\, \mathbb{I}_n) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det(f - d\, id_V) = 0 \qquad \det(A - d\, \mathbb{I}_n) = 0$$

Definizione:

Data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ si dice polinomio caratteristico di A

$$P_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n) \qquad P_f(x) = \det(f - x\, id_V) \quad f: V \to V$$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \qquad P_A(x)=\det\begin{pmatrix}1-x&1&1\\1&1-x&1\\1&1-x&1-x\end{pmatrix}= \quad 1^\circ \text{ rig}$$

$$\begin{matrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{matrix}$$

$$=(1-x)\det\begin{pmatrix}1-x&1\\1&1-x\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}1&1\\1&1-x\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1&1-x\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=(1-x)\left(x^2-2x+\cancel{1}\cancel{-1}\right)-(\cancel{1}-x\cancel{-1})+(\cancel{1}-\cancel{1}+x)=$$

$$=(1-x)(x^2-2x)+x+x=x^2-\cancel{2x}-x^3+2x^2+\cancel{2x}=-x^3+3x^2$$

$$=x^2(3-x)$$

$P_A(x)=x^{2}(3-x)$ ha come radici $0 \quad 0 \quad 3$

$m_a(0)=2$ perché compare 2 volte

$m_a(3)=1$

Proposizione: se $A,B\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ e $A\sim B$ allora
$$P_A(x)=P_B(x)$$

Dim:

$P_A(x)=\det(A-xI_n)$ esiste $H\in GL_n(\mathbb{R})$: $\boxed{H^{-1}AH=B}$

$P_B(x)=\det(B-xI_n)$

$$P_B(x)=\det\left(H^{-1}AH-xI_n\right)=\det\left(H^{-1}AH-H^{-1}xI_nH\right)=$$

$$=\det\left(H^{-1}(A-xI_n)H\right)=\det(H^{-1})\det(A-xI_n)\det(H)=$$

$$=\det(A-xI_n)=P_A(x).$$

$\square$

Controesempio: $\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a \neq 0$

$$P_{\mathbb{I}_n}(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

$$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

ma $A \neq \mathbb{I}_n$ quindi A NON è simile a $\mathbb{I}_n$.

Oss: $P_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n)$
$P_A(0) = \det(A - 0\mathbb{I}_n) = \det(A)$

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(x) = x^2(3-x) = 3x^2 - x^3 \quad P_A(0) = 0$
$\det(A) = 0$

questo 3 è la somma delle entrate di A sulla diagonale.

Oss: $P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} tr(A) x^{n-1} + \dots + \det(A)$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & \dots \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-x \end{pmatrix} = (a_{11}-\underline{x})(a_{22}-\underline{x}) \cdots (a_{nn}-\underline{x}) + \dots$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) x^{n-1} + \dots$$

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ $\qquad$ se $A \sim B$ $\quad tr(A) = tr(B)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 200 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$