Es: posto $a=1$ determinare B_1 e B_2 basi di $\mathbb{R}^3$ tali che

5) $A_{B_1,B_2,f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & 0 \\ 2-2a & 2a & 0 \end{pmatrix} \quad a=1 \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\ker f \begin{cases} y=0 \\ -y=0 \\ 2y=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad B_{\ker f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad B_{\operatorname{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Per avere matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si deve prendere

$B_1 = B_V = \{ \underline{v_1}, \boxed{v_2, v_3} \}$ base di $\mathbb{R}^3$ nel dominio

v_2, v_3: $\ker f$

$r=1$

$$B_1 = \left\{ \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$B_2 = B_W = \{ \underline{f(v_1)}, w_2, w_3 \} = \left\{ \underset{=f(e_2)}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

base di $\mathbb{R}^3$ nel codominio

$$A_{B_1,B_2,f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione 1:

$id_V : V \to V \quad id_V(v) = v$

$B_V = \{ v_1, \dots, v_n \} \quad A_{B_V, B_V, id_V} = \mathbb{I}_n$

$$id_V(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 v_n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

Osservazione 2:

Se $f: V \to W$ è isomorfismo = lineare + biiettiva

$\ker f = \{0_V\} \quad \operatorname{Im} f = W \Rightarrow \dim V = \dim W$

$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$B_W = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è base di W perché generano
$\mathrm{Im} f = W$ e $\dim W = n$

$A_{B_V, B_W, f} = \mathbb{I}_n \qquad v_1, \; f(v_1) = 1 \cdot f(v_1) + 0 \cdot f(v_2) + \dots + 0 f(v_n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

Proposizione: $f: V \longrightarrow W$ e $g: W \longrightarrow Z$ applicazioni lineari allora $g \circ f : V \longrightarrow Z$ è lineare.

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

Dim:

$$g(f(v_1 + v_2)) = g(f(v_1) + f(v_2)) = g(f(v_1)) + g(f(v_2))$$

$$g \circ f (v_1 + v_2) = g \circ f(v_1) + g \circ f(v_2)$$

$$g(f(av)) = g(af(v)) = a\, g(f(v)).$$ □.

Proposizione:

Se $f: V \longrightarrow W$ e $g: W \longrightarrow Z$ sono lineari e

$B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \qquad B_W = \{w_1, \dots, w_m\} \qquad B_Z = \{z_1, \dots, z_p\}$

allora dette $A = A_{B_V, B_W, f} \qquad B = A_{B_W, B_Z, g}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & W \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

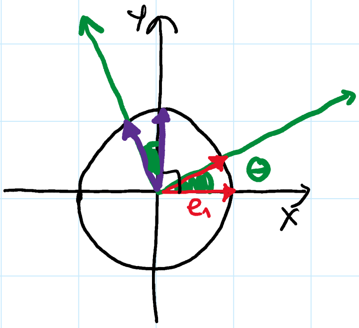
$C = A_{B_V, B_Z, g \circ f} = BA$

$g \circ f$

$B \cdot A$

Esempio: Rotazioni nel piano.

$\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ rotazione di angolo θ



basi canoniche

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\uparrow \rho_\theta(e_1) \qquad \uparrow \rho_\theta(e_2)$

$$\rho_{\theta_2} \circ \rho_{\theta_1} = \rho_{\theta_1+\theta_2} \qquad R_{\theta_2} \cdot R_{\theta_1} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

$$B_V = B_W = B_Z = \{e_1, e_2\}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & -\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

$$R_\theta \cdot R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2 .$$

$$\boxed{(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}}$$

Corollario: se $f: V \to W$ è isomorfismo (biiettiva) e $f^{-1}: W \to V$ è l'inversa di f.

$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\qquad$ $\dim V = \dim W = n$

$B_W = \{w_1, \dots, w_n\}$

$A = A_{B_V, B_W, f} \qquad B = A_{B_W, B_V, f^{-1}} = A^{-1}$

Dim:

$f: V \to W \qquad g: W \to Z \qquad$ come $g = f^{-1}: W \to V \qquad Z = V$

$g \circ f = f^{-1} \circ f = id_V \quad B \cdot A = \mathbb{I}_n \quad B = A^{-1}$

scambiando $\quad f \circ g = f \circ f^{-1} = id_W \quad A \cdot B = \mathbb{I}_n$

Es: Scrivere la matrice $R_{\frac{\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\operatorname{sen}\pi/3 \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix}$ la lunghezza di $\begin{pmatrix} 1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ è $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

Riassunto:

Sono equivalenti:

① $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile

② $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ isomorfismo

③ $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \quad rg\, A = n$

Se A è invertibile esiste A^{-1} inversa di A

f è invertibile con inversa $f^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

A è invertibile $\Leftrightarrow rg\, A = \dim \operatorname{Im} f = n$

Minori:

Definizione: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si dice minore di A una matrice ottenuta da A cancellando alcune righe e/o alcune colonne.

Esempi:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad (1 \quad 2) \qquad (0 \quad 5)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (1) \qquad (0)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 8\\ 2 & 1 & 0 & 5\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}(1 & 3)\end{matrix} \quad \begin{pmatrix}1 & - & 3 & 8\\ 2 & 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

Proposizione: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$rg A = r$ = massimo ordine di un minore quadrato invertibile.

Dim: "cenno" della costruzione

Se $rg A = r$ = dim spazio generato dalle righe di A
= dim. spazio generato dalle colonne di A

selezioniamo r righe lin. indip. il
r colonne li. indip.

minore ottenuto cancellando le restanti $m-r$ righe e le restanti $n-r$ colonne è quadrato di ordine r invertibile.

Esempi:

$$rg\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \text{ è invertibile}$$

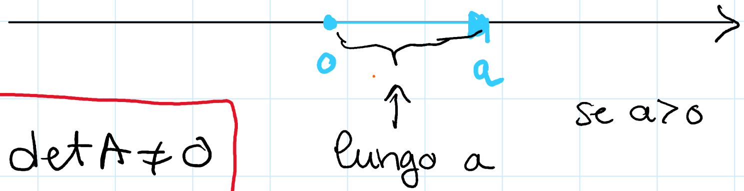
$$rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Determinante

Scopo: data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, vogliamo introdurre $\det A \in \mathbb{R}$ che determina se A è invertibile o no

è un volume orientato.

$n=1$ $\quad A \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ $\quad A = (a)$ è invertibile $\Leftrightarrow$
$a \neq 0$ $\quad \det A = a$



$$\boxed{A \text{ è invertibile se e solo } \det A \neq 0}$$

"Volume orientato" $n=1$ $\det A = a$ $\quad a>0$

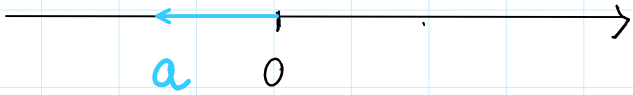
"Volume orientato" $n=1$ $\det A = a$ $a>0$

orientato nel verso del x positivo

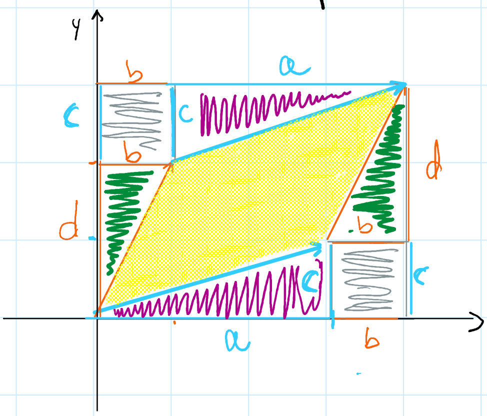
$|a|$ è la lunghezza del vettore

se $a<0$

$\{1\} = \mathcal{E}_1$



$n=2$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det A = ad - bc$



$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$

Area del parallelogramma v_1, v_2 è l'area del rettangolo di lati $a+b$, $c+d$ meno le aree dei pezzi segnati

$$A = (a+b)(c+d) - 2\frac{ac}{2} - 2\frac{bd}{2} - 2bc =$$

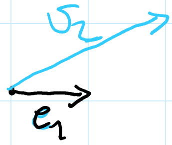
$$= \cancel{ac} + bc + ad + \cancel{bd} - \cancel{ac} - \cancel{bd} - 2bc = ad - bc$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 1$

$\ v_1 \quad v_2$

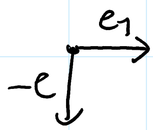
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}.$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$
$$\begin{array}{cc} e_1 & v_2 \end{array}$$



$\{e_1, v_2\}$ sono orientati come la base canonica

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -1$$
$$\begin{array}{cc} e_1 & -e_2 \end{array}$$



non è orientata come la base canonica

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

1° riga

$$= ad - bc$$

$$\begin{pmatrix} + & -\\ - & +\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} + & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} + & -\\ - & +\end{matrix}$$

$$\det A = -bc + da = ad - bc$$

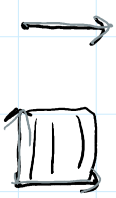
Esempi: $\det\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = 10 - 2 = 8$

Proprietà del determinante

$$\det : M_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

1) $\det I_n = 1$

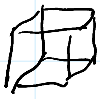
2) A è invertibile $\iff \det A \neq 0$



$n=1$

Area 1 $\quad n=2$

$n=3$



Volume 1

Definizione: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{n1} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

indichiamo con A_{ij} il minore di A ottenuto eliminando la riga i-esima e la colonna j-esima

$\boxed{\text{K-esima riga}}$

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} \det(A_{ki})}$$

k-esima colonna

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(A_{ik})$$

Esempio: $n=3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Sviluppo 1° riga $k=1$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$\det A = \cancel{0 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} - 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -2(4+1) + 3 = -10 + 3 = -7$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Seconda colonna

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$\det A = -2 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \cancel{0 \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= -2(4+1) + 3(1) = -10+3 = -7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$