

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

INGEGNERIA MECCANICA, CANALI 1 E 2

DOCENTE: LUISA FIOROT.

Prova di autovalutazione sulle prime 12 lezioni del corso

DOMANDE

1. Dimostrare che l'intersezione di sottospazi è sottospazio. (1,5 pts)
2. Enunciare e dimostrare la formula di Grassmann. (2,5 pts)

PER LA LODE: Siano U e W sottospazi di un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale V di dimensione n con $\dim U = \dim W$. Dimostrare che esiste un sottospazio $T \leq V$ tale che $T \oplus U = T \oplus W = V$.

ESERCIZI

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni nei numeri complessi $\mathbb{C}$ dell'equazione:

$$\frac{z^3}{|z|} = \frac{2\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 2)i}{2 + i} \bar{z}$$

e scriverle in forma esponenziale. Quante sono queste soluzioni? (4 pts)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad W : \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

- (a) Si determinino una base e la dimensione per ciascuno dei due sottospazi. (3 pts)
- (b) Si determini una base di $U \cap W$ e la si completi ad una base di $U + W$, indicando le dimensioni dei due sottospazi. I sottospazi U e W sono in somma diretta? (3 pts)
- (c) Aggiungere il minimo numero di equazioni al sistema lineare che definisce W per ottenere un sistema lineare che abbia come soluzioni i vettori del sottospazio $U \cap W$. Dire se le equazioni aggiunte al sistema sono univocamente determinate o se vi sono possibili alternative alla soluzione proposta. (2 pts)
- (d) Scrivere il vettore $v = e_2 + e_3 + e_4$ come somma $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Tale scrittura è unica? (2 pts)
- (e) Si determini un sottospazio T di $\mathbb{R}^5$ tale che $T \oplus (U \cap W) = U$. (2 pts)
- (f) Determinare un sottospazio S di $\mathbb{R}^5$ tale che $S \oplus U = S \oplus W = \mathbb{R}^5$. (2 pts)

(voltare pagina)

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare dipendente dal parametro reale k reali nelle incognite reali x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_4 = k \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 + (1+k)x_4 = 1 \\ x_1 + kx_2 + (1-k^2)x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

1. Si determinino le soluzioni del sistema lineare al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per i valori di k per cui il sistema ha soluzioni scrivere le soluzioni nella forma $v + U$ con $v \in \mathbb{R}^4$ e $U \leq \mathbb{R}^4$. (4 pti)
 2. Esistono dei valori di k tali che l'insieme delle soluzioni sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? (1 pto)
 3. Per $k = -1$ esiste un sistema lineare di 2 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 che sia equivalente a quello dato? Per $k = -1$ esiste un sistema lineare di 4 equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 che sia equivalente a quello dato? (1,5 pti)
 4. Esiste un valore del parametro reale k tale che il sistema sia equivalente ad un sistema lineare di 1 sola equazione nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 ? (1,5 pti)
-

Regole d'esame

- Compilare il testo in ogni sua parte (nome, cognome, n. matricola, ecc..) e scrivere nome, cognome e numero di matricola in ogni foglio protocollo da consegnare. Le soluzioni vanno scritte in modo leggibile e ordinato, NON consegnare eventuali fogli di brutta copia.
- Verrà valutato solo quanto scritto **a penna (blu o nera)** .
- Si può uscire solo dopo aver consegnato l'elaborato. La durata del compito è di 2 ore e 30 minuti.
- È possibile ritirarsi (solo dopo 1 ora dall'inizio della prova): scrivere, ben visibile, la lettera "R" sul testo consegnato e compilato.
- I telefoni devono essere spenti. Zaini e altro materiale va riposto ai bordi dell'aula. Non è consentito l'uso della calcolatrice.
- BUON LAVORO!!