Applicazioni lineari:

$f: V \to W$ lineare

f è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im} f = W$

Nel caso in cui $\dim W = m$ allora

f è suriettiva $\iff \dim \mathrm{Im} f = m = \dim W$.

Domanda 5:

Criterio di iniettività

Un'applicazione lineare $f: V \to W$ è iniettiva se e solo se $\ker f = \{0_V\}$.

$\iff$

Dim:

"$\Longrightarrow$" Ipotesi: f lineare iniettiva

Tesi: $\ker f = \{0_V\}$

Dimostriamo che se $v \in \ker f$ allora $v = 0_V$

Se $v \in \ker f$ $f(v) = 0_W = f(0_V)$ essendo f iniettiva

$\Rightarrow v = 0_V$.

"$\Longleftarrow$" Ipotesi: $\ker f = \{0_V\}$ $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$

Tesi: f è iniettiva.

Dimostriamo che se $f(v_1) = f(v_2)$ allora $v_1 = v_2$

Se $f(v_1) = f(v_2) \iff f(v_1) - f(v_2) = 0_W$ essendo f lineare

$\overset{\shortparallel}{f(v_1 - v_2)} = 0_W \iff$

$v_1 - v_2 \in \ker f$ ma per ipotesi $\ker f = \{0_V\} \iff$

$v_1 - v_2 = 0_V \iff v_1 = v_2$. $\square$

Controesempio:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$ non è lineare, non è iniettiva

$f(-1) = f(1)$ ma $-1 \neq 1$

$\mathrm{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R} \mid \underset{\substack{\| \\ x^2=0}}{f(x)=0} \} = \{0\}$.

Domanda 6:

Teorema delle dimensioni

Data $f: V \to W$ applicazione lineare con $\dim V = n$ allora

$$\boxed{\begin{array}{c} n = \dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f \\ n = K + (n-K) \end{array}}$$

Dim:

Sia $K = \dim \mathrm{Ker} f$ (notiamo $\mathrm{Ker} f$ ha dimensione finita $K \le n$ perché $\mathrm{Ker} f \le V$).

Sia $B_{\mathrm{Ker} f} = \{ v_1, \dots, v_K \}$ e completiamola a base di V

$$B_V = \{ v_1, \dots, v_K, v_{K+1}, \dots, v_n \} \qquad n = \dim V$$

Tesi: $\dim \mathrm{Im} f = n - K$.

Sappiamo che

$$\mathrm{Im} f = \langle \underset{\substack{\| \\ 0_W}}{f(v_1)}, \dots, \underset{\substack{\| \\ 0_W}}{f(v_K)}, f(v_{K+1}), \dots, f(v_n) \rangle$$

perché $v_1, \dots, v_K \in \mathrm{Ker} f = \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \}$

$$\mathrm{Im} f = \langle f(v_{K+1}), \dots, f(v_n) \rangle \qquad \text{sono } n-K \text{ generatori.}$$

è necessario e sufficiente dimostrare che $f(v_{K+1}), \dots, f(v_n)$

è necessario e sufficiente dimostrare che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W.

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i f(v_i) = 0_W$$ dimostriamo che $a_i = 0$ $\forall\, i = k+1, \dots, n$.

$\iff f\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i\right) = 0_W$ perché f è lineare

$\iff \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i \in \operatorname{Ker} f = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

$\iff \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$

$\iff \sum_{i=1}^{k} a_i v_i - \sum_{i=k+1}^{n} a_i v_i = 0_V$ ma $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ è lin. indipendente

$\iff a_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$ $\square$

Riassunto:

Ip: f lineare $\dim V = n$

Dim: Fissare $B_{\operatorname{Ker} f} = \{v_1, \dots, v_k\}$

$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\operatorname{Im} f = \langle \cancel{f(v_1)}, \dots, \cancel{f(v_k)}, f(v_{k+1}), \dots, f(v_n) \rangle =$

$= \langle f(v_{k+1}), \dots, f(v_n) \rangle$ dimostrare che sono lin. ind. usando la def.

Conseguenze:

1) Se $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ può essere iniettiva?

Conseguenze:

1) Se $f: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ può essere iniettiva?

$\operatorname{Im} f \leq \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \dim \operatorname{Im} f \leq 3 \qquad -\dim \operatorname{Im} f \geqslant -3$

$5 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Ker} f = 5 - \dim \operatorname{Im} f \geqslant 5-3 = 2$ quindi $\operatorname{Ker} f \neq \{0_V\}$

perciò non è mai iniettiva.

$f: V \longrightarrow W \quad n = \dim V > \dim W$ non è mai iniettiva.

Nota bene: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ può essere iniettiva, ma non è sempre iniettiva:

$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è iniettiva $\operatorname{Ker} f = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è iniettiva $\operatorname{Ker} f = \langle e_2, e_3 \rangle$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è iniettiva $\operatorname{Ker} f = \langle e_3 \rangle$

$\underline{f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ è iniettiva $\operatorname{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\rightarrow \operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) Se $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ non può essere suriettiva

perché $\dim \operatorname{Im} f \leq 3$ ma $W = \mathbb{R}^5$ ha dimensione 5

$3 = \dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \qquad \dim \operatorname{Ker} f \geqslant 0$

$-\dim \operatorname{Ker} f \leq 0$

$\dim \operatorname{Im} f = 3 - \dim \operatorname{Ker} f \leq 3 - 0 = 3$

3) Se $f: V \longrightarrow W$ $\boxed{n = \dim V = \dim W}$

$$\underset{n}{n = \dim V} = \underset{0}{\dim \ker f} + \underset{n}{\dim \operatorname{Im} f}$$

f è suriettiva $\iff \dim \operatorname{Im} f = \dim W = n$

$\iff \dim \ker f = 0 \iff \ker f = \{0_V\}$

$\iff f$ è iniettiva.

Se è iniettiva $\Rightarrow$ suriettiva $\Rightarrow$ è biiettiva

se è suriettiva $\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow$ è biiettiva

Esempio:

$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ $V = \mathbb{R}^4$ $\dim V = 4$

$W = M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\dim W = 4$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_4 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è iniettiva? È suriettiva? È biiettiva?

$\ker f = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 & x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 & x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 & x_3 = 0 \\ x_4 = 0 & x_4 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ quindi f è iniettiva $\Rightarrow$ è suriettiva e biiettiva

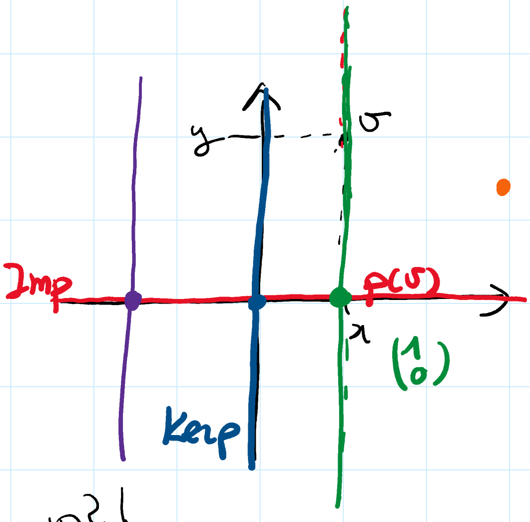
perché $\dim V = \dim W = 4$

perché $\dim V = \dim W = 4$

$$4 = \dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$$
$$4 = 0 + \dim \mathrm{Im} f \Rightarrow \underline{\dim \mathrm{Im} f = 4}$$
$$\underline{\mathrm{Im} f \leq M_{2,2}(\mathbb{R})} \Rightarrow \mathrm{Im} f = M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Esempio:

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\underline{\mathrm{Im}\, p} = \left\{ p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\underline{\mathrm{Ker}\, p} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = p^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$p^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad x = 1$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Ker}\, p$$

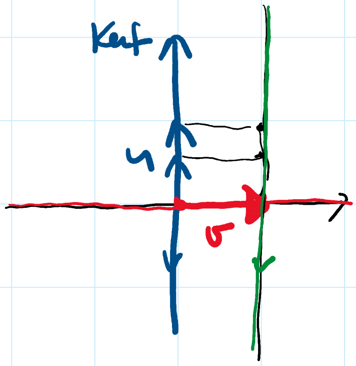
Struttura delle controimmagini

Sia $f : V \to W$ lineare $w \in W$.

Struttura delle controimmagini:

Sia $f: V \to W$ lineare $w \in W$.

$$f^{-1}(\{w\}) \begin{cases} \emptyset & \text{se e solo se } w \notin \operatorname{Im} f \\ \text{se } w \in \operatorname{Im} f \quad w = f(v) \quad \boxed{f^{-1}(\{w\}) = v + \operatorname{Ker} f} \end{cases}$$



$$v + \operatorname{Ker} f := \{ v + u \mid u \in \operatorname{Ker} f \}$$

Dim:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{ v \in V \mid f(v) = w \}$$

$$f^{-1}(\{w\}) = \emptyset \iff w \notin \operatorname{Im} f$$

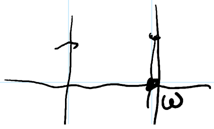
Se $w \in \operatorname{Im} f$ $\quad \boxed{f^{-1}(\{w\}) = v + \operatorname{Ker} f}$ con $f(v) = w$

Dimostriamo $f^{-1}(\{w\}) \subseteq v + \operatorname{Ker} f$

$v' \in f^{-1}(\{w\})$ allora $\boxed{\begin{matrix} f(v') = w \\ f(v) = w \end{matrix}}$ $\quad f(v') - f(v) = 0_W$ linearità $\quad f(v' - v) = 0_W$

$u = v' - v \in \operatorname{Ker} f$ $\qquad v' = v + (v' - v) = v + u$ con $u \in \operatorname{Ker} f$.

$f^{-1}(\{w\}) \supseteq v + \operatorname{Ker} f$ $\quad$ prendiamo $v + u \in v + \operatorname{Ker} f$ cioè $u \in \operatorname{Ker} f$ $\qquad f(v+u) = f(v) + f(u) = w + 0_W = w$



Esercizio:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ y + z \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$-1°$colonna $- 2°$colonna $+ 3°$colonna

$-2 + 1 + 1 = 0$

$0 - 1 + 1 = 0$

$B_{\text{Ker} f} \quad B_{\text{Im} f}$

$f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$

Svolg.:

Calcoliamo $\text{Ker} f$ e ricordiamo $\dim \text{Ker} f \geq 1$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = y - z = -z - z = -2z \\ y = -z \end{cases}$

$\begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \qquad \text{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \underline{\dim \text{Ker} f = 1}$

f non è iniettiva

$3 = \dim V = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f \implies \dim \text{Im} f = 2$

$3 = 1 + 2 \qquad \text{Im} f \subseteq W = \mathbb{R}^2$ quindi

$\text{Im} f = \mathbb{R}^2 \qquad f$ è suriettiva

$\boxed{B_{\text{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}} \qquad \boxed{B_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

$f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = y - z + 3 \\ y = 1 - z \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x = 1 - z - z + 3 \\ y = 1 - z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 4 - 2z \\ y = 1 - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 - z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

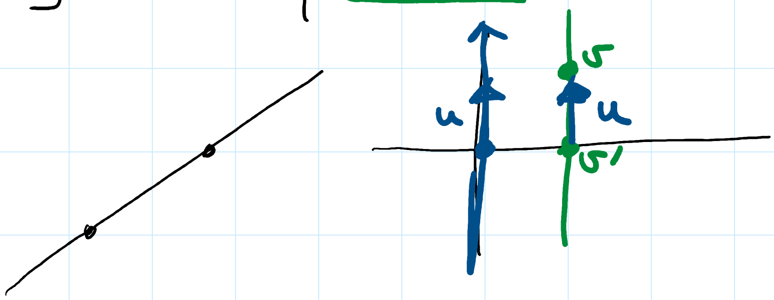
$$f^{-1}(\{w\}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2-z \\ 1-z \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{z=0} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\operatorname{Ker} f} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}^{z=2} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Quando $\quad V \quad U, U' \leq V$

$$\boxed{v + U = v' + U'} \iff \begin{cases} U = U' \\ v - v' \in U \end{cases}$$

$v + U = \{ v + u \mid u \in U \}$



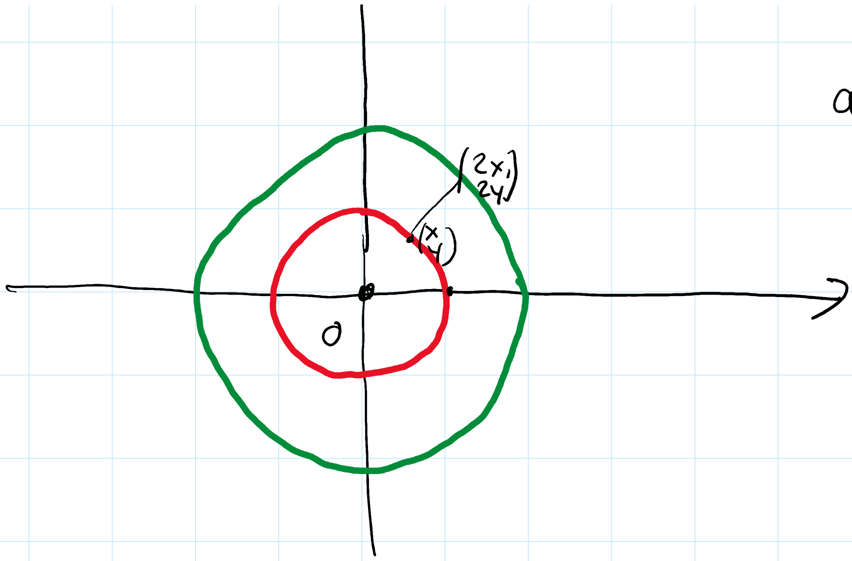
Definizione: un **endomorfismo** di V è un'applicazione lineare $f : V \to V$.

Esempi:

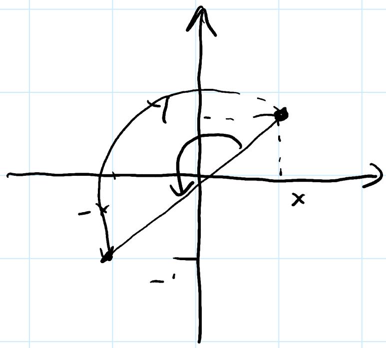
Omotetie $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$a = 2$



$a=2$



$a=-1$

simmetria rispetto all'origine

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f\binom{x}{y}=\binom{-x}{-y}$ è una rotazione di angolo π attorno all'origine.

Oss: se f è un endomorfismo di V con $\dim V=n$ allora f è iniettivo $\iff$ è suriettivo $\iff$ è biiettiva.

Fatto. Siano V e W $\mathbb{R}$-spazi vettoriali

$B_V=\{v_1,\dots,v_n\}$ e $w_1,\dots,w_n$ vettori di W

(che possono anche essere uguali fra loro) allora

esiste un'unica applicazione lineare

$f: V \longrightarrow W$ tale che $f(v_i)=w_i$

$\forall i=1,\dots,n.$

Perché: $v=\sum_{i=1}^n a_i v_i$ $\quad f(v)=\sum_{i=1}^n a_i f(v_i)=\sum_{i=1}^n a_i w_i.$

Esercizio: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$B_{\mathbb{R}^2} = \Big\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} \Big\} \qquad w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$$

$$f(v_1) = w_1$$
$$f(v_2) = w_2$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\, f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\, f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}x+5y\\2x+6y\\3x+7y\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 5\\2 & 6\\3 & 7\end{pmatrix}$$